

Übungen zur Vorlesung
Nichtlinearen Funktionalanalysis
Serie 6 vom 18.5.2026
Abgabedatum: 10.6.2026

Aufgabe 21

[Demi- und Hemistetigkeit]

Zeigen Sie:

- (i) Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum mit Dualraum $\mathcal{B}'$ und $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ monoton, hemistetig und lokal beschränkt. Dann gilt für $u_n, u \in \mathcal{B}$ mit $u_n \rightarrow u$, dass dann $f(u_n) \xrightarrow{*} f(u)$ für¹ $n \rightarrow \infty$.
- (ii)* Sei nun $f : M \subsetneq \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ monoton und hemistetig. Außerdem sei f lokal beschränkt, was in dieser Situation heißt, dass für Folgen $(u_n)_n \subset M$ mit $u_n \rightarrow u \in M$ für $n \rightarrow \infty$ die Bildfolge $(f(u_n))_n \subset \mathcal{B}'$ beschränkt ist. Formulieren Sie möglichst allgemeine Bedingungen an den Definitionsbereich M , damit das Resultat in Teil (i) noch wahr ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathcal{B}$ nicht reflexiv sein muss. Für den Beweis von Teil (i) betrachten Sie die spezielle Nullfolge $t_n := \|u_n - u\|_{\mathcal{B}}^{1/2}$ und $w_n := u + t_n v$ für beliebige $v \in \mathcal{B}$, um die Hemistetigkeit ins Spiel zu bringen. Verwenden Sie die Monotonie von f für die Differenz $f(u_n) - f(w_n)$.

Aufgabe 22

[Nemyckii-Operatoren]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $g : \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

- (i) $x \mapsto g(x, z)$ sei messbar auf Ω für alle $z = (z^1, \dots, z^M) \in \mathbb{R}^M$,
- (ii) $z \mapsto g(x, z)$ sei stetig auf $\mathbb{R}^M$ für $\mathcal{L}^n$ -fast alle $x \in \Omega$,
- (iii) Es gebe eine Funktion $a \in L^q(\Omega)$ und eine Konstante $c > 0$, so dass

$$|g(x, z)| \leq |a(x)| + c \sum_{i=1}^M |z^i|^{p_i/q},$$

für Exponenten $1 \leq q, p_i < \infty, i = 1, \dots, M$.

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$N : L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_M}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

¹In nichtreflexiven Banachräumen wird die Demistetigkeit oft so definiert.

definiert durch $(Nu)(x) := g(x, u(x))$ für $u = (u^1, \dots, u^M) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ mit $u^i \in L^{p_i}(\Omega)$ für $i = 1, \dots, M$ ist stetig und beschränkt und erfüllt die Abschätzung

$$\|Nu\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left[\|a\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^M \|u^i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i/q} \right]$$

für alle $u = (u^1, \dots, u^M) \in L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_M}(\Omega)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Messbarkeit von Nu , bevor Sie die nötigen Abschätzungen zeigen. Für die Stetigkeit können Sie die folgende Variante des Lebegueschen Konvergenzsatzes benutzen: Falls $g_n, h_n \in L^1(\Omega)$ mit $|g_n| \leq h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $g_n \rightarrow g$ und $h_n \rightarrow h$ $\mathcal{L}^n$ -fast überall in Ω und $\int_{\Omega} h_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x) dx$ für $n \rightarrow \infty$, dann folgt $g_n \rightarrow g$ in $L^1(\Omega)$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 23

[Differentialoperator in schwacher Formulierung]

Sei $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \geq 2n/(n+2)$ und $s \geq 0$. Betrachte den nichtlinearen Operator $f : \mathcal{B} := W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}'$ definiert durch:

$$\langle f(u), \eta \rangle_{\mathcal{B}' \times \mathcal{B}} := \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta + s u \eta \, dx \quad \text{für } u, \eta \in \mathcal{B}.$$

Zeigen Sie, dass f strikt monoton und koerziv ist.

Aufgabe 24

[Divergenzgleichung]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $p \in (1, \infty)$.

Zeigen Sie:

Für alle $g \in (L^p(\Omega))'$ existiert genau eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, \nabla u(x))) = g & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{RWP}_4)$$

wobei $A = A(x, \xi) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar in x für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ und stetig in ξ für $\mathcal{L}^n$ -fast alle $x \in \Omega$ ist und folgende Bedingungen für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{L}^n$ -fast alle $x \in \Omega$ erfüllt:

- (i) $|A(x, \xi)| \leq C(h_1(x) + |\xi|^{p-1})$ für eine Funktion $h_1 \in L^q(\Omega)$,
- (ii) $(A(x, \xi) - A(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ für $\xi \neq \eta$,
- (iii) $A(x, \xi) \cdot \xi \geq c|\xi|^p - h_2(x)$ für eine Funktion $h_2 \in L^1(\Omega)$.