Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II
Serie 14 vom 6.4.2006

Aufgabe 53 **[Hölderräume]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *hölderstetig zum Exponenten* $\alpha \in (0,1]$, also $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, wenn

$$\text{Höl}_{\Omega,\alpha} f := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Zeigen Sie:

(i) $\text{Höl}_{\Omega,\alpha}$ ist eine Halbnorm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(ii) Für $\tilde{f} : \Omega_\sigma := \{x/\sigma : x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, definiert durch $\tilde{f}(x) := f(\sigma x)$ gilt

$$\text{Höl}_{\Omega_\sigma,\alpha} \tilde{f} = \sigma^\alpha \text{Höl}_{\Omega,\alpha} f.$$

(iii) Für $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ gilt

$$\text{Höl}_{\Omega,\alpha}(fg) \le \text{Höl}_{\Omega,\alpha} f \cdot \|g\|_{L^\infty(\Omega)} + \text{Höl}_{\Omega,\alpha} g \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(iv) Für $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, $T \in C^{0,\alpha}(\Omega_1, \mathbb{R}^n)$ mit $T(\Omega_1) \subset \Omega_2$ und $f \in C^{0,\beta}(\Omega_2)$, $\beta \in (0,1]$, gilt $f \circ T \in C^{0,\alpha\beta}(\Omega_1)$ mit

$$\text{Höl}_{\Omega_1,\alpha\beta}(f \circ T) \le \text{Höl}_{\Omega_2,\beta} f \cdot (\text{Höl}_{\Omega_1,\alpha} T)^\beta.$$

Aufgabe 54 **[Oszillation $\Rightarrow$ Hölderstetigkeit]**

Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\theta \in (0, 1/2)$ mit

$$\operatorname*{osc}_{B_{\theta\rho}(y)} f \le \frac{1}{2} \operatorname*{osc}_{B_\rho(y)} f < \infty \quad \text{für alle } B_\rho(y) \subset \Omega$$

gilt: $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$\alpha = -\frac{\log 2}{\log \theta}.$$

Aufgabe 55 **[Interpolation]**

Beweisen Sie mit Hilfe des Ehrling-Lemmas (Lemma 3.4 der Vorlesung) und des Einbettungssatzes für Hölderräume, Proposition 3.7 bzw. 3.9 der Vorlesung, die folgenden beiden Interpolationsungleichungen, wobei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$:

(i) Sei $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1]$, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\Omega, n, \alpha, \varepsilon)$, so dass

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C(\Omega, n, \alpha, \varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\Omega, n, \varepsilon)$, so dass

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} + C(\Omega, n, \varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aufgabe 56 **[Schauder-Abschätzung für Wärmeleitungsgleichung]**

Seien $\alpha, \beta \in (0,1)$ und $C^{k,\alpha}_{l,\beta}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ der Raum der auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ definierten Funktionen, die zum Exponenten α hölderstetige $k-$te Ableitungen nach $x \in \mathbb{R}^n$ und zum Exponenten β hölderstetige $l-$te Ableitungen bzgl. $t \in [0,\infty)$ besitzen. Für $g \in C^{0,\alpha}_{0,\beta}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ definiere

$$\text{Höl}_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty),(\alpha,\beta)}\, g := \sup_{\substack{(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ (x,t) \neq (y,s)}} \frac{|g(x,t) - g(y,s)|}{|x-y|^\alpha + |t-s|^\beta}.$$

Zeigen Sie: Für $u \in C^{2,\alpha}_{1,\alpha/2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ mit

$$H(u) := \text{Höl}_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty),(\alpha,\alpha/2)} D^2 u + \text{Höl}_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty),(\alpha,\alpha/2)} \partial_t u < \infty$$

gilt die Ungleichung

$$H(u) \leq C(n,\alpha)\text{Höl}_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty),(\alpha,\alpha/2)} (\partial_t - \Delta)u.$$

Hinweise: Gehen Sie wie im Beweis zu Proposition 5.2 der Vorlesung vor. Reskalieren Sie dabei *parabolisch* (vgl. Kapitel I.3), d.h. $(x,t) \mapsto (sx, s^2 t)$, und benutzen Sie abschließend anstelle der Cauchy-Abschätzungen für harmonische Funktionen die entsprechenden Abschätzungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, Korollar 1.43 der Vorlesung.
