Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II
Serie 15 vom 13.4.2006

Aufgabe 57 **[Schauder am Rand für $L = \Delta$]**

Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 5.6 der Vorlesung:

Sei $u \in C^{2,\alpha}(K)$, $\alpha \in (0,1)$, für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$, mit

$$u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \quad \text{und} \quad \text{Höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha} D^2 u < \infty,$$

wobei $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$.

Dann gibt es eine Konstante $C = C(n,\alpha)$

$$\text{Höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha} D^2 u \leq C(n,\alpha) \text{Höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha} \Delta u.$$

Hinweis: Die Widerspruchsannahme führt auf die Existenz eines Multiindex γ mit $|\gamma| = 2$, einer Zahl $i \in \{1,\ldots,n\}$ und einer Teilfolge $m \to \infty$, $x_m \| e_n \in \mathbb{R}^n_+$, $h_m > 0$, so dass

$$h_m^{-\alpha} |\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)| \geq c(n) > 0.$$

Bearbeiten Sie hier nur den in der Vorlesung lediglich angedeuteten Fall 1:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x_m|}{h_m} = \infty.$$

Aufgabe 58 **[Vorversion der Schauderabschätzungen am Rand]**

Beweisen Sie Proposition 5.8 der Vorlesung:

L erfülle (5.1), (5.2) und (E) in $B_2(0)^+$. Dann gilt für $u, \phi \in C^{2,\alpha}(\overline{B_2(0)^+})$ mit

$$u = \phi \text{ auf } B_2(0) \cap \{x_n = 0\}$$

die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_1(0)^+})} \leq C(\Lambda, n\alpha) \left[\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_2(0)^+})} + \|\phi\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_2(0)^+})} + \|u\|_{C^2(\overline{B_2(0)^+})} \right].$$

Hinweis: Gehen Sie so vor wie beim Beweis von Proposition 5.4 der Vorlesung.

Aufgabe 59 **[Approximation von Differentialoperatoren]**

Zeigen Sie: Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, L erfülle (5.1), (5.2), (E) und $c \leq 0$ in Ω, sei weiterhin $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dann gibt es Differentialoperatoren L_m mit Koeffizienten in $C^\infty(\overline{\Omega})$ und $c_m \leq 0$, so dass für alle m die Bedingungen (5.1), (5.2) und (E) mit $\Lambda_m := 2\Lambda$ erfüllt sind, und $f_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so dass $f_m \leq C$ (unabhängig von m) und

$$L_m \to L \quad \text{und} \quad f_m \to f \text{ in } C^0(\overline{\Omega}).$$

Aufgabe 60 **[Höhere Regularität am Rand]**

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 5.11 der Vorlesung, indem Sie die höhere Randregularität und die Randabschätzungen beweisen:

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$, L erfülle die Voraussetzungen (5.1), (5.2) und (E), $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1)$ und

$$\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}, \|b_i\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \Lambda,$$

und $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \phi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $u = \phi$ auf $\partial\Omega$ gilt $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ und die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left[\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\phi\|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \right].$$

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass Sie ohne Einschränkung $\phi = 0$ annehmen können, biegen Sie den Rand lokal gerade, approximieren Sie wie beim Beweis der inneren Regularität und verwenden Sie anstelle von Satz 5.1 nun den Satz 5.5 der Vorlesung. Für tangentielle Ableitungen können Sie eine Differentialgleichung herleiten, die verbleibenden rein normalen Ableitungen können Sie abschließend mit Hilfe der Differentialgleichung kontrollieren.
