Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II
Serie 16 vom 20.4.2006

Aufgabe 61 **[Konvergenz von Differentialgleichungen]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_m) \subset W^{1,2}(\Omega)$ eine beschränkte Folge schwacher Lösungen der Differentialgleichungen

$$L_m u_m := \partial_i(a_{ij}^{(m)} \partial_j u_m) + b_i^{(m)} \partial_i u_m + c^{(m)} u_m = f_m \quad \text{in } \Omega,$$

wobei $a_{ij}^{(m)}, b_i^{(m)} \in L^\infty(\Omega)$, $c^m \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $f_m \in L^2(\Omega)$ mit

$$\|a_{ij}^{(m)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b_i^{(m)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \leq C \quad \text{(unabh. von m)}.$$

Weiterhin gelte für $m \to \infty$

$$a_{ij}^{(m)} \to a_{ij}, \quad b_i^{(m)} \to b_i \quad \mathscr{L}^n - \text{f.ü. in } \Omega$$
$$c_m \rightharpoonup c \text{ in } L^2(\Omega), \quad f_m \to f \text{ in } L^2(\Omega),$$

wobei $c \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Beweisen Sie: Eine Teilfolge der u_m konvergiert schwach in $W^{1,2}(\Omega)$ gegen eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + b_i \partial_i u + cu = f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Rellich, Satz 3.31 der Vorlesung.

Aufgabe 62 **[Obere Kontaktmenge]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Dann definiert

$$\Gamma_u^+ := \{x \in \Omega : u(y) \leq u(x) + \xi \cdot (y - x) \text{ für alle } y \in \Omega \quad \text{für (mind.) ein } \xi = \xi(x) \in \mathbb{R}^n\}$$

die *obere Kontaktmenge von u*.

Zeigen Sie:

(i) Γ_u^+ ist relativ abgeschlossen in Ω.

(ii) u ist konkav auf Ω genau dann, wenn $\Gamma_u^+ = \Omega$.

(iii) Für $u \in C^1(\Omega)$ und $x \in \Gamma_u^+$ gilt $\xi(x) = Du(x)$.

(iv) Für $u \in C^2(\Omega)$ gilt $D^2 u \leq 0$ auf Γ_u^+.

Aufgabe 63 **[Normalabbildung]**

Betrachte zu $u \in C^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die mengenwertige Abbildung $\chi_u : \Omega \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, die sogenannte *Normalabbildung von u*, definiert durch

$$\chi_u(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : u(y) \leq u(x) + \xi \cdot (y - x) \text{ für alle } y \in \Omega\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\chi_u(x) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow x \in \Gamma_u^+$.

(ii) Für $u \in C^1(\Omega)$ gilt $\chi_u(x) = \{Du(x)\}$ auf Γ_u^+.

(iii) Berechnen Sie χ_u für die nichtglatte Funktion

$$u(x) := a\left(1 - \frac{|x-z|}{R}\right), \quad x \in \Omega := B_R(z),$$

wobei $R > 0, a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind.

Aufgabe 64 **[Gegenbeispiel zum Eindeutigkeitssatz für starke Lösungen]**

Beweisen Sie, dass der Eindeutigkeitssatz, Satz 6.4 der Vorlesung, i.A. falsch ist, falls man starke Lösungen in $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $p < n$ zulässt. Betrachten Sie dazu das folgende Dirichlet-problem

$$\begin{cases} \Delta u + \left[\frac{n-1}{1-\lambda} - 1\right] \frac{x_i x_j}{|x|^2} \partial_{ij} u = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases}$$

wobei $0 < \lambda < 1$, $n \geq 2$, und zeigen Sie, dass dieses Problem mehrere starke Lösungen in $W^{2,p}(\Omega)$ für $p < n/(2-\lambda)$ besitzt.

Hinweis: Wählen Sie einen radialsymmetrischen Ansatz $u(x) := v(|x|)$.
