Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II
Serie 17 vom 27.4.2006

Aufgabe 65 **[Abschätzung des Normalbildes der oberen Kontaktmenge]**

Beweisen Sie ohne Verwendung des Lemmas von Sard die Aussage

$$\mathscr{L}^n(Du(\Gamma_u^+)) \le \int_{\Gamma_u^+} |\det D^2 u(x)|\, dx \quad \text{für } u \in C^2(\Omega).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst für $\varepsilon > 0$ die Abbildung $y \mapsto Du(y) - \varepsilon y$ auf Γ_u^+ und verwenden Sie die Übungsaufgabe 62 und den klassischen Transformationssatz, bevor Sie ε gegen 0 gehen lassen.

Aufgabe 66 **[2. Prototyp vom Alexandroffschen Masimumprinzip]**

Beweisen Sie Proposition 6.4 der Vorlesung:

Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, eine messbare, punktweise positiv definite Matrixfunktion $A = (a_{ij}) : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gilt

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam}\Omega}{n\omega_n^{1/n}} \left\| \frac{a_{ij}\partial_{ij}u}{\det(a_{ij})^{1/n}} \right\|_{L^n(\Gamma_u^+)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Propostion 6.3 der Vorlesung, die Aufgabe 62 (iv) und die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel, die Sie anwenden können, sobald sie das Matrixprodukt AB, $B = -D^2u$, mit Hilfe der Wurzelzerlegung $B = S^2$ symmetrisiert haben.

Aufgabe 67 **[Diskrete Hölder Ungleichung]**

(i) Seien $a_i, b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N$, $p, q \in (1, \infty)$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Beweisen Sie die *(diskrete) Hölderungleichung*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} b_i^q \right)^{1/q}$$

und diskutieren Sie den Gleichheitsfall.

(ii) Verwenden Sie (i), um die in der Vorlesung beim Beweis von Satz 6.2 benutzten Ungleichungen

$$-a_{ij}\partial_{ij}u \leq \left(|b|^n + \frac{|f|^n}{\mu^n} \right)^{1/n} \left(|Du|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n}$$

und

$$2^{2-n} \frac{1}{|\xi|^n + \mu^n} \leq \left(\frac{1}{|\xi|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)}} \right)^{n-1}$$

nachzuweisen. Hierbei sind $\mu > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in C^2(\Omega)$, $a_{ij}, b_i, f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar für $i, j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 68

Seien $A_m \subset \Omega' \subset\subset \Omega$, $m \in \mathbb{N}$, $g \in L^1(\Omega)$ und $a_m \to a$ in $\mathbb{R}$ für $m \to \infty$ mit

$$a_m \leq \|g\|_{L^1(A_m)} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass

$$a \leq \|g\|_{L^1(\limsup_{m\to\infty} A_m)},$$

wobei

$$\limsup_{m\to\infty} A_m := \{x \in \Omega' : \exists\, x_m \in A_m : x_m \to x \text{ für eine Teilfolge } m \to \infty\}.$$
