Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II
Serie 18 vom 5.5.2006

Aufgabe 69 **[Lebesgue-Punkte]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$. Dann heißt $x \in \Omega$ ein *Lebesgue-Punkt* von f, falls

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy := \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Bekanntlich sind $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ Lebesgue-Punkte von f.

Zeigen Sie:

(i) Für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f(y)\, dy.$$

(ii) Für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$f(x) = \lim_{\substack{B_{r_i}(z_i)\subset\mathbb{R}^n \\ r_i\to 0,\quad x\in B_{r_i}(z_i)}} \fint_{B_{r_i}(z_i)} f(y)\, dy.$$

(iii) [“Nicely shrinking sets” $E_i \to x$]:
Für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} \fint_{E_i} f(y)\, dy,$$

wobei vorausgesetzt sei, dass eine Konstante $\gamma > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} &E_i \subset B_{r_i}(x) \quad \text{mit} \quad r_i \to 0 \text{ für alle } i \to \infty, \\ &\mathscr{L}^n(E_i) \geq \gamma \cdot \mathscr{L}^n(B_{r_i}(x)) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

(iv) Geben Sie Beispiele von “nicely shrinking sets” $E_i \to 0$ im $\mathbb{R}^n$, also Mengen E_i mit den Eigenschaften (1) bezüglich $x := 0$, so dass $0 \notin E_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und auch Beispiele von Mengen F_i mit $0 \in F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, die aber nicht die Eigenschaften (1) erfüllen.

Aufgabe 70 **[Charakterisierung von L^p-Funktionen nach F. Riesz]**

Beweisen Sie:

Sei $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Würfel mit achsenparallelen Seiten und $f \in L^1(Q_0)$ durch 0 fortgesetzt zu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{Q}$ sei die Familie aller Überdeckungen von Q_0 mit achsenparallelen Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren, und

$$K_p(f) := \left[\sup_{\{Q_i\}\in\mathscr{Q}} \sum_i \mathscr{L}^n(Q_i) \left(\fint_{Q_i} |f(x)|\, dx \right)^p \right]^{1/p}, \quad p \in [1,\infty).$$

Dann gilt

$$f \in L^p(Q_0) \quad \Leftrightarrow \quad K_p(f) < \infty,$$

und

$$\|f\|_{L^p(Q_0)} = K_p(f).$$

Hinweis: Für die Beweisrichtung "$K_p(f) < \infty \Rightarrow f \in L^p(Q_0)$ nehmen Sie die Unterteilung von Q_0 in 2^{nk} Unterwürfel Q_{ik} kongruent zu $2^{-k}Q_0$ und schätzen Sie zunächst die L^p-Normen der Funktionen

$$\phi_i(x) := \fint_{Q_{ik}} |f(y)|\, dy \quad \text{für } x \in Q_{ik}$$

gegen $K_p(f)$ ab, dann betrachten Sie den Grenzprozess $k \to \infty$.

Aufgabe 71 **[Stetigkeit des Newton-Potentials auf L^p-Räumen]**

Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ mit

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$$

ist das *Newton-Potential*

$$Nf(x) := \int_\Omega \Phi(x-y) f(y)\, dy, \quad x \in \Omega,$$

eine stetige lineare Abbildung $N : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ mit

$$\|N\|_{L(L^p(\Omega),L^q(\Omega))} \le C(\operatorname{diam}\Omega, n, p, q).$$

Hierbei bezeichnet

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \ge 3 \end{cases}$$

die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Hinweis: Ein Teil der Behauptung wurde schon in Übungsaufgabe 4 der 1. Serie bewiesen, daraus folgt die Behauptung für $p > n/2$ direkt aus der Hölderungleichung. Für $1 \le p \le n/2$, $p \le q < \infty$ machen Sie sich zunächst klar, für welche Exponenten r (abhängig von der Dimension $n = 2$ oder $n > 2$) $\Phi(x - .) \in L^r(\Omega)$, bevor Sie das Newton-Potential mit der Hölderungleichung abschätzen. Für den dann verbleibenden Fall $1 \le p \le n/2$, $1 \le q < p$ reicht dann eine nochmalige Anwendung der Hölderungleichung.

Aufgabe 72 **[Interpolationslemma für Sobolevfunktionen]**

Beweisen Sie:

(i) Für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, gilt

$$\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2}\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2}.$$

(ii) Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$ und $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ gilt für $\varepsilon \in (0,1)$ die Abschätzung

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega,n,p)\frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hinweis zu (i): Betrachten Sie zunächst Würfel Q_r der Seitenlänge $r > 0$ und interpolieren Sie mit Hilfe des Ehrling Lemmas, um

$$\|Du\|_{L^p(Q_1)} \le \|D^2u\|_{L^p(Q_1)} + C(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)}$$

zu erhalten, bevor Sie diese Ungleichung auf Q_r mittels $v(x) := u(rx)$ skalieren. Anschließend überdecken Sie den Raum $\mathbb{R}^n$ bis auf eine $\mathscr{L}^n$-Nullmenge durch abzählbar viele paarweise disjunkte Würfel und addieren die Abschätzungen auf den Würfeln auf. Abschließend setzen Sie

$$r := \sqrt{\frac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon}{\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon}}$$

und lassen ε gegen Null gehen.

Hinweis zu (ii): Setzen Sie mit dem Fortsetzungsoperator aus Satz 3.25 die Funktion u als $W^{2,p}$-Funktion auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ fort und benutzen Sie (i).