Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

# Übungen zur Vorlesung
# Partielle Differentialgleichungen II
# Serie 19 vom 11.5.2006

---

## Aufgabe 73 **[Hölderstetige Fortsetzung]**

Beweisen Sie:

(i) $b^\alpha - a^\alpha \leq |b-a|^\alpha \quad \forall\, a,b \geq 0,\ \alpha \in (0,1]$.

(ii) Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum mit Metrik $d$, $A \subset X$ und $f \in C^{0,\alpha}(\overline{A})$, $\alpha \in (0,1]$. Dann gibt es eine Funktion $F \in C^{0,\alpha}(X)$ mit $F|_A = f$ und

$$\mathrm{Höl}_{X,\alpha} F \leq \mathrm{Höl}_{A,\alpha} f.$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz

$$F(x) := \inf_{z\in A}[f(z) + \mathrm{Höl}_{A,\alpha} f \cdot d(x,z)^\alpha],$$

und zeigen Sie zunächst mit Hilfe von (i), dass $F(x) > -\infty$ für jedes $x \in X$. Dann beweisen Sie die Hölderabschätzung zuerst für die Funktion

$$x \mapsto f(z) + \mathrm{Höl}_{A,\alpha} f \cdot d(x,z)^\alpha$$

für festes $z \in A$, bevor Sie das Infimum über alle $z \in A$ betrachten.

---

## Aufgabe 74 **[Calderon-Zygmund Abschätzung für Operatoren mit konstanten Koeffizienten]**

Beweisen Sie: Es sei $1 < p < \infty$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq \Lambda < \infty$ mit

$$|a_{ij}| \leq \Lambda \quad \text{für alle } i,j \in \{1,\dots,n\}$$

und

$$\xi^T A \xi \geq \frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{E}$$

Dann gibt es eine Konstante $C = C(\Lambda,p,n)$, so dass

$$\|D^2 v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Lambda,p,n)\|a_{ij}\partial_{ij} v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Machen Sie sich wie im Beweis von Proposition 5.3 der Vorlesung zunächst klar, dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass $A$ symmetrisch ist. Anschließend transformieren Sie mit Hilfe der Wurzelzerlegung $A = B^2$ auf eine Funktion $\tilde{v}$ mit der Eigenschaft, dass $\Delta\tilde{v}(x) = a_{ij}\partial_{ij} v(Bx)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und wenden auf diese Funktion Lemma 6.7 der Vorlesung an.

---

## Aufgabe 75 **[Stetigkeitsmodul]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\overline{\Omega})$, dann heißt eine Funktion $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ *Stetigkeitsmodul von* $f$, wenn $\omega$ monton wächst, $\omega(0) = 0$ und $\omega$ stetig in 0 ist und die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|) \qquad \text{für alle } \ x,y \in \Omega$$

erfüllt.

(i) Geben Sie zu $f$ einen Stetigkeitsmodul $\omega$ an für den Fall, dass $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Konstruieren Sie aus einem gegebenen beschränkten Stetigkeitsmodul $\omega$ zu $f$ einen konkaven Stetigkeitsmodul $\overline{\omega}$ zu $f$.

Hinweis: Betrachten Sie dazu alle konkaven und stetigen Funktionen $\lambda$ auf $[0,\infty)$ mit $\lambda(t) \geq \omega(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$, und bilden Sie das Infimum.

---

## Aufgabe 76 **[Transformation von starken Unterlösungen]**

Sei $n \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{2,n}(\Omega)$ eine starke Unterlösung von $Lu = 0$ in $\Omega$, d.h.

$$Lu := a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \geq 0 \quad \mathscr{L}^n - \text{f.ü. in } \ \Omega,$$

wobei $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}$ positiv semi-definit, $c \leq 0$. Weiter sei $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\psi' \geq 0$ und $\psi'' \geq 0$.

Zeigen Sie, dass für $w := \psi \circ u$ die Abschätzung

$$Lw \geq c\psi(0) \quad \mathscr{L}^n - \text{f.ü. in } \ \Omega$$

gilt.

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe von Faltungen, oder machen Sie sich anhand der Produkt- und Kettenregel für Sobolevfunktionen, Proposition 3.22 der Vorlesung, klar, dass Sie den Ausdruck $Lw$ $\mathscr{L}^n$-f.ü in $\Omega$ berechnen können. Betrachten Sie für den Fall, dass $\Omega$ unbeschränkt ist, eine kompakte Ausschöpfung des Gebietes und die Funktion $\tilde{\psi} := \psi - \psi(0)$, um die Voraussetzungen von Proposition 3.22 (ii) zu verifizieren.

---