Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II
Serie 20 vom 18.5.2006

Aufgabe 77 **[L^p-Normen]**

Beweisen Sie:

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, dann gelten für

$$\Phi(p,u) := \left(\fint_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

die Beziehungen

(i) $\lim_{p\to\infty} \Phi_p(u) = \sup_\Omega |u|$,

(ii) $\lim_{p\to-\infty} \Phi_p(u) = \inf_\Omega |u|$, falls $|u| > 0$ $\mathscr{L}^n$-f.ü. in Ω.

Hierbei ist jeweils das essentielle Supremum bzw. Infimum gemeint.

Hinweis: Benutzen Sie die Tschebychev-Ungleichung

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \geq \kappa \mathscr{L}^n(\{|f| \geq \kappa\})^{1/q} \quad \text{für } \kappa > 0.$$

Aufgabe 78 **[Komposition von Sublösungen mit konvexen Funktionen]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine Unterlösung von

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

wobei

$$\frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ für } \mathscr{L}^n-\text{fast alle} \quad x \in \Omega \tag{E}$$

erfüllt ist. Dann ist für jede nicht-negative, konvexe und monoton wachsende Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ auch die Komposition $f \circ u$ eine Sublösung von (1), falls es eine Zahl $N \geq 0$ gibt, so dass $f''(t) = 0$ für $|t| > N$.

Hinweis: Testen Sie die Differentialungleichung mit $f'(u)\phi$ für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, und machen Sie sich anhand der Kettenregel, Proposition 3.22 (ii) der Vorlesung, klar, dass $f \circ u$ und die Testfunktion in $W^{1,2}(\Omega)$ bzw. $W_0^{1,2}(\Omega)$ liegen.

Aufgabe 79 **[Iterationslemma]**

Beweisen Sie:

Sei $\Phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative, beschränkte Funktion, und für $0 \leq \rho < R \leq T$ gelte

$$\Phi(\rho) \leq A(R-\rho)^{-\alpha} + \theta\Phi(R)$$

für gewisse Konstanten $A, \alpha > 0$ und $0 \leq \theta < 1$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\alpha, \theta)$, so dass für $0 \leq \rho < R \leq T$ die Ungleichung

$$\Phi(\rho) \leq C(\alpha, \theta)A(R-\rho)^{-\alpha}$$

gilt.

Hinweis: Für ein später geeignet klein zu wählendes $\tau \in (0,1)$ definiere

$$\begin{cases} t_0 := \rho \\ t_{i+1} := t_i + (1-\tau)\tau^i(R-\rho) \quad \text{für } \; i \geq 0, \end{cases}$$

und iteriere die vorausgesetzte Ungleichung.

Aufgabe 80 **[Gegenbeispiel zur Hölderstetigkeit: Eine nichtlineare elliptische Gleichung in Divergenzform]**

Zeigen Sie, dass die nicht beschränkte Funktion $u(x) := \log\log(1/|x|) - \log\log(1/R)$, $R \in (0,1)$, in der Sobolevklasse $W_0^{1,2}(B_R(0))$ liegt und eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$-\Delta u = |Du|^2 \text{ in } B_R(0) \subset \mathbb{R}^2, \quad R \in (0,1)$$

ist.

Hinweis: Nach einem allgemeinen Hebbarkeitssatz von DeGiorgi, den Sie nicht beweisen müssen, reicht es, die Gültigkeit der Differentialgleichung in der starken Form punktweise auf $B_R(0) \setminus \{0\}$ nachzuweisen.
