Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

# Übungen zur Vorlesung
# Partielle Differentialgleichungen II
# Serie 21 vom 1.6.2006

---

## Aufgabe 81 **[$W^{1,n} \subset BMO$]**

Eine Funktion $f \in L^1(B_1(0))$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, gehört zu der Menge von Funktionen mit *beschränkter mittlerer Oszillation* auf $B_1(0)$, kurz $f \in BMO(B_1(0))$, wenn

$$\sup_{B_r(x) \subset B_1(0))} \fint_{B_r(x)} |u(y) - \fint_{B_r(x)} u|\, dy < \infty.$$

Beweisen Sie: $W^{1,n}(B_1(0)) \subset BMO(B_1(0))$.

Hinweis: Benutzen Sie die auf Bällen $B_r(x)$ skalierte Version der Poincaré-Ungleichung, Übungsaufgabe 49 (i).

---

## Aufgabe 82 **[$L^1$-Wachstum auf Bällen]**

Zeigen Sie:

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \subset \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, und für ein $\beta \in \mathbb{R}$ gelte die Wachstumsbedingung

$$\int_{B_\rho(x)} |f(y)|\, dy \leq M\rho^\beta \qquad \text{für alle } B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt für $\mu < \beta$ und $x \in \Omega$ die Abschätzung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-\mu} f(y)\, dy \right| \leq \frac{M 2^{\mu_+ + 1} (\mathrm{diam}(\Omega)\sqrt{e})^{\beta-\mu}}{\beta - \mu},$$

wobei $\mu_+ := \{\mu, 0\}$.

Hinweis: Spalten Sie das Integral “zwiebelschalenartig” auf, indem Sie auf Kreisringen $B_k \setminus B_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, für

$$B_k := B_{2^{-k}\mathrm{diam}(\Omega)}(x)$$

arbeiten.

---

## Aufgabe 83 **[Morrey-Wachstum]**

Beweisen Sie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in (0,1)$, und $u \in W^{1,1}(\Omega)$ erfülle die *Morreysche Wachstumsbedingung*

$$\int_{B_r(x)} |Du(y)|\, dy \le M r^{n-1+\alpha} \qquad \text{für alle } \; B_r(x) \subset \Omega.$$

Dann gilt $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ und für $B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega$ hat man

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho(x_0)} u \le C(n,\alpha) M \rho^\alpha.$$

Hinweis: Verwenden Sie Lemma 3.36 der Vorlesung und Übungsaufgabe 82.

---

## Aufgabe 84 **[Hölderstetigkeit für Lösungen von Divergenzgleichungen für $n = 2$ ]**

Beweisen Sie:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ löse

$$\int_\Omega a_{ij} \partial_j u \partial_i \phi \, dx = 0 \qquad \text{für alle } \; \phi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

wobei $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ die Elliptizitätsbedingung

$$\frac{1}{\Lambda} |\xi|^2 \le a_{ij}(x) \xi^i \xi^j \le \Lambda |\xi|^2 \qquad \text{für alle } \; \xi \in \mathbb{R}^n \text{ für } \; \mathscr{L}^n - \text{ f.a.} x \in \Omega \tag{E}$$

mit einer Konstanten $\Lambda \in [1, \infty)$ erfüllen. Dann ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Hinweis: Testen Sie die Differentialgleichung mit

$$\eta^2 \left[ u - \fint_{B_R(x_0) \setminus B_{R/2}(x_0)} u \right],$$

wobei $\eta \in C_0^\infty(B_R(x_0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_{R/2}(x_0)$, um mit Hilfe der skalierten Poincaré Ungleichung (Übungsaufgabe 49 (i) auf Kreisringen statt Bällen) die Ungleichung

$$\int_{B_{R/2}/(x_0)} |Du|^2 \, dx \le C \int_{B_R(x_0) \setminus B_{R/2}(x_0)} |Du|^2 \, dx \tag{1}$$

herzuleiten. Dann benutzen Sie den *Widmanschen "Lochfülltrick"*, indem Sie die $C-$fache linke Seite von (1) hinzuaddieren. Eine Iteration der resultierenden Ungleichung wie in der Vorlesung beim Beweis der Hölderstetigkeit, Korollar 7.3, vgl. Übungsaufgabe 54, führt dann auf eine Morreysche Wachstumsbedingung

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 \, dx \le C_1 \rho^{2\alpha},$$

die dann mit Hilfe der Hölderungleichung und Aufgabe 83 zur Hölderstetigkeit führt.

---