Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II Serie 22 vom 15.6.2006

Aufgabe 85 **[Linearisierung voll nichtlinearer PDE]**

$u \in C^4(\Omega)$ erfülle die voll nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$F(.,u,Du,D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

wobei $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n))$ mit $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T\}$.

(i) Linearisieren Sie diese Gleichung, indem Sie (1) zweimal in Richtung von $\xi \in \mathbb{R}^n$ differenzieren, um die folgende Identität in

$$u_{\xi\xi} := \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k} \xi^i \xi^k$$

zu erhalten:

$$Lu_{\xi\xi} := F_{r_{ij}} \partial_{ij} u_{\xi\xi} = -F_{w_i} \partial_i u_{\xi\xi} - F_z u_{\xi\xi} - Q_\xi,$$

wobei

$$\begin{aligned} Q_\xi := {} & F_{r_{ij}r_{kl}} \partial_{ij} u_\xi \partial_{kl} u_\xi + 2F_{r_{ij}w_k} \partial_{ij} u_\xi \partial_k u_\xi + 2F_{r_{ij}z} \partial_{ij} u_\xi u_\xi + 2F_{r_{ij}x_k} \partial_{ij} u_\xi \xi_k \\ & + F_{w_i w_k} \partial_i u_\xi \partial_k u_\xi + 2F_{w_i z} \partial_i u_\xi u_\xi + 2F_{w_i x_k} \partial_i u_\xi \xi_k \\ & + F_{zz} (u_\xi)^2 + 2F_{z x_k} u_\xi \xi_k + F_{x_k x_l} \xi_k \xi_l. \end{aligned} \tag{2}$$

Hierbei ist das Argument in F und in den Ableitungen von F jeweils das Tupel (x,u,Du,Du^2).

(ii) Beweisen Sie, dass Q_ξ aus (2) für $|u| + |Du| \leq \Gamma$ die Abschätzung

$$Q_\xi \leq \Lambda(\Gamma) \left(1 + (1+|D^2u|)|D^3u| + |D^2u|^3\right) \qquad \forall\, \xi \in S^{n-1} \tag{8.5}$$

erfüllt, wenn F konkav in r ist, und wenn zusätzlich für $|z| + |w| \leq \Gamma$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{gathered} |F_{r_{ij}w_k}(x,z,w,r)| \leq \Lambda(\Gamma), \\ |F_{r_{ij}z}(x,z,w,r)|, |F_{r_{ij}x_k}(x,z,w,r)|, |F_{w_i w_j}(x,z,w,r)| \leq \Lambda(\Gamma)(1+|r|), \\ |F_{w_i x_j}(x,z,w,r)|, |F_{w_i z}(x,z,w,r)| \leq \Lambda(\Gamma)(1+|r|^2), \\ |F_{zz}(x,z,w,r)|, |F_{z x_i}(x,z,w,r)|, |F_{x_i x_j}(x,z,w,r)| \leq \Lambda(\Gamma)(1+|r|^3). \end{gathered}$$

Aufgabe 86 **[Gebietstransformationen bei voll nichtlinearen Gleichungen]**

Betrachten Sie die voll nichtlineare partielle Differentialgleichung (1) auf $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^3$ unter den Bedingungen (ϕ), (E) und (8.3) aus der Vorlesung mit einer Konstanten $\Lambda \in [1,\infty)$, und zeigen Sie, dass (ϕ), (E) und (8.3) unter einer C^3-Gebietstransformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in gleichwertige Bedingungen (ϕ^*), (E*) und (8.3*) mit geeignet modifizerter Konstante Λ^* übergehen.

Aufgabe 87 **[Elliptizität]**

(i) Beweisen Sie: Falls für $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n))$ die Matrix $(F_{r_{ij}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit ist, dann gilt

$$F(x,z,w,r) \leq F(x,z,w,r+q) \quad \forall\, q \in S(n), q \geq 0,$$

wobei $q \geq 0 :\Leftrightarrow q$ positiv semidefinit.

(ii) Beweisen Sie: Für $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n))$ sind die folgenden Elliptizitätsbedingungen (E) und (E*) äquivalent:

$$F_{r_{ij}}(x,z,w,r)\xi^i\xi^j \geq \frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x,z,w,r) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n), \tag{E}$$

$$F(x,z,w,r+q) - F(x,z,w,r) \geq \frac{1}{\Lambda}\|q\| \quad \forall\, q \in S(n), q \geq 0, (x,z,w,r) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n). \tag{E*}$$

Hinweis: Für (E) $\Rightarrow$ (E*) betrachten Sie einen Eigenvektor v von q mit $\|v\| = 1$ und $qv = \|q\|v$, und schätzen $v \cdot (DFq)v$ nach unten ab. Dann können Sie v zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ergänzen und nutzen die Unabhängigkeit der Spur von der Basiswahl. Für (E*) $\Rightarrow$ (E) wählen Sie das dyadische Produkt $q := \xi \otimes \xi = \xi\xi^T$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, und bilden die Richtungsableitung von F nach r in Richtung von q.

(iii) $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n))$ heißt *elliptisch bezüglich* u für $u \in C^2(\Omega)$, falls F die Elliptizitätsbedingung (E) auf der Menge

$$\{(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) : x \in \Omega\}$$

erfüllt. Falls F nur Lipschitz stetig in r ist, dann soll die Bedingung (E) überall dort gelten, wo die Ableitungen $F_{r_{ij}}$ existieren, also für $\mathscr{L}^k$-fast alle $r \in S(n)$, $k = \dim S(n) = n(n+1)/2$.

Untersuchen Sie folgende Beispiele auf Elliptizität:

(a) [Monge-Ampère-Gleichung] $F(x,u,Du,D^2u) := \det D^2u - f(x) = 0,\ f > 0.$

(b) [Pucci-Gleichungen] Für $\Lambda \geq n$ definiere

$$\begin{aligned} M_\Lambda[u] &:= \frac{1}{\Lambda}\Delta u + (1-(n/\Lambda))\lambda_{\max}(D^2u), \\ m_\Lambda[u] &:= \frac{1}{\Lambda}\Delta u + (1-(n/\Lambda))\lambda_{\min}(D^2u), \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{\max}(r)$ den maximalen Eigenwert der Matrix $r \in S(n)$ und $\lambda_{\min}(r)$ den minimalen Eigenwert von r bezeichnet. Die *Pucci-Gleichungen* lauten

$$F_1(x,u,Du,D^2u) := M_\Lambda[u] - f(x) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x,u,Du,D^2u) := m_\Lambda[u] - f(x) = 0.$$

Hinweis: Beweisen Sie z.B. für F_1 zunächst mit Hilfe der Charakterisierung

$$\lambda_{\max}(A) := \sup_{v \in S^{n-1}} v \cdot Av \quad \text{für } A \in S(n),$$

dass die Funktion $\lambda_{\max} : S(n) \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig ist. Dann machen Sie sich klar, dass für $A \in S(n)$, wo $\lambda_{\max}$ differenzierbar ist, die Ungleichung

$$D\lambda_{\max}(A) \cdot B = \partial_{r_{ij}}\lambda_{\max}(A)b_{ij} \geq 0$$

für alle positiv semidefiniten Matrizen $B = (b_{ij}) \in S(n)$ gilt, bevor Sie schließlich B geschickt wählen (vgl. Teil (ii)), um die Elliptizitätsbedingung an den Differenzierbarkeitsstellen von M_Λ zu überprüfen.

(c) [Quasilineare Gleichungen]

$$F(x,u,Du,D^2u) := a_{ij}(x,u,Du)\partial_{ij}u + b(x,u,Du) = 0.$$

mit

$$\frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi^i\xi^j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 88 **[Voraussetzung für $|u|$-Abschätzung: lineare elliptische PDE]**

Für $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty$ mit $a_{ij}\xi^i\xi^j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2$ betrachte die lineare elliptische Differentialgleichung

$$F(.,u,Du,D^2u) := a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = 0.$$

Welche zusätzlichen Bedingungen an die Koeffizienten a_{ij}, b_i, c implizieren die Gültigkeit der Voraussetzung (8.2) der Vorlesung an F, d.h.

$$\limsup_{z\to\infty}\sup_{x\in\Omega} F(x,z,0,0) < 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{z\to-\infty}\inf_{x\in\Omega} F(x,z,0,0) > 0?$$

Vergleichen Sie dies mit den Maximumprinzipen aus Kapitel 2 der Vorlesung.
