Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 1 vom 20.10.2005

Aufgabe 1 **[Verallgemeinerte Transportgleichung]**

Lösen Sie explizit das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ vorgegeben sind.

Hinweis. Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung, die die Funktion

$$\zeta(s) := u(x + sb, t + s)$$

erfüllt, und beachten Sie die Anfangsdaten

$$\zeta(-t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb).$$

Aufgabe 2 **[Polarkoordinaten und Radialsymmetrie]**

(i) Beweisen Sie die Rotationsinvarianz der Laplace-Gleichung: Falls für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $\Delta u = 0$ gilt, dann ist auch

$$\Delta(u(Ox)) = 0 \quad \text{für alle } O \in O(n), x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $O(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ die orthogonale Gruppe bezeichnet.

(ii) Die Funktion $u \in C^2(B_1(0))$ sei rotationssymmetrisch, d.h. $u(x) = v(r)$, $r = |x|$. Zeigen Sie

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

(iii) Für $n = 2$ sei in Polarkoordinaten $u(r, \phi) := u(re^{i\phi})$. Beweisen Sie

$$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi} u,$$

und zeigen Sie anschließend, dass die Funktion

$$u(x) := r^{1/a} \sin(\phi/a)$$

harmonisch ist auf der Menge

$$D_a := \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \phi < a\pi\},$$

wobei $a \in (0,2)$ ein reeller Parameter ist. Wie verhält sich der Gradient der Lösung bei Annäherung an den Ursprung für verschiedene Parameter a?

Aufgabe 3 **[Mittelwertkonvergenz]**

Beweisen Sie:

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\mathscr{H}^{n-1}(y) = u(x) \qquad \text{für alle } \; u \in C^0(\mathbb{R}^n),\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 4 **[Newton-Potential]**

Zeigen Sie: Für ein Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\frac{n}{2} < p \leq \infty$ ist das *Newton-Potential*

$$Nf(x) := \int_\Omega \Phi(x-y)\, f(y)\, dy$$

eine stetige lineare Abbildung $N : L^p(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ mit

$$\|Nf\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\operatorname{diam}\Omega, n, p)\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei $C = C(\operatorname{diam}\Omega, n, p)$ eine Konstante ist, die nur vom Durchmesser $\operatorname{diam}\Omega$ von Ω, der Dimension n und von p abhängt. Die Funktion Φ ist die Fundamentallösung zum Laplace-Operator definiert in Definition 1.3 der Vorlesung.