Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I Serie 10 vom 4.1.2006

Aufgabe 37 **[Nichtexistenz von Lösungen nichtlinearer PDE]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit äußerer Einheitsnormale ν auf $\partial\Omega \in C^1$.

(i) Beweisen Sie, dass die Dirichlet-Randwertaufgabe für die *Eikonalgleichung*,

$$\begin{cases} |Du|^2 = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

keine klassische Lösung $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ besitzt.

(ii) Beweisen Sie, dass die Neumann-Randwertaufgabe für die *Gleichung vorgeschriebener Gauß-Krümmung*,

$$\begin{cases} \Delta u = 1 - Ke^u & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

keine klassische Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ besitzt, wobei $K < 0$ eine gegebene auf $\overline{\Omega}$ stetige Funktion ist.

Aufgabe 38 **[Lineare Operatoren]**

Seien X, Y, Z normierte Vektorräume. Zeigen Sie, dass der Raum

$$L(X,Y) := \{l : X \to Y : l \text{ linear und stetig}\}$$

ein Banachraum ist, falls Y ein Banachraum ist. Zeigen Sie weiterhin, dass für $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$ die Ungleichung

$$\|ST\|_{L(X,Z)} \leq \|S\|_{L(Y,Z)} \|T\|_{L(X,Y)}$$

gilt.

Aufgabe 39 **[Hölderräume]**

Zeigen Sie, dass der Hölderraum $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|.\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})})$, $\alpha \in (0,1]$, ein Banachraum ist (vgl. Definition 3.5 der Vorlesung).

Aufgabe 40

[Eigenschaften von L^p-Funktionen]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Beweisen Sie:

(i) Für $\lambda \in [0,1]$ und $u \in L^r(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ mit $1 \le p \le q \le r < \infty$ und mit

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$$

gelten die Ungleichungen

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le \|u\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}$$

und für $\lambda \in (0,1]$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le \varepsilon \|u\|_{L^r(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^{\mu}} \|u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

wobei

$$\mu := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^{-1}.$$

Hinweis: Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten mit Hilfe einer Variante der Youngschen Ungleichung: $ab \le \varepsilon a^s + \varepsilon^{-t/s} b^t$ für $s^{-1} + t^{-1} = 1$.

(ii) Es gilt die *verallgemeinerte Hölderungleichung*

$$\int_{\Omega} \Pi_{i=1}^m u_i(x)\, dx \le \Pi_{i=1}^m \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

für $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$, mit

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1.$$

Hinweis: Dies folgt z.B. aus der gewöhnlichen Hölderungleichung durch Induktion.

(iii) Für $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|y| < \varepsilon} \|u(. - y) - u\|_{L^p(\Omega')} = 0 \text{ für alle } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für $1 \le p < \infty$ der Raum $C^0_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt.
