Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 11 vom 11.1.2006

Aufgabe 41 **[Beispiele von Sobolevfunktionen]**

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

in $W^{1,\infty}(B_1(0))$ liegt.

(ii) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \log\log\frac{1}{|x|} & \text{für } x \in B_1(0) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $0 < R < 1$ in $W^{1,2}(B_R(0))$ liegt.

(iii) Sei $n = 1$. Ist die *Heavyside-Funktion*

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Sobolevfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 42 **[PDE in schwacher Form]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge. Leiten Sie die schwache Form der partiellen Differentialgleichung

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega$$

her, wobei L ein Differentialoperator in Divergenzform ist, d.h. für $u \in C^2(\Omega)$ ist

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i\partial_i u + du. \quad a_{ij}, b_i \in C^1(\Omega), c_i, d \in C^0(\Omega).$$

Beweisen Sie anschließend die Gültigkeit der schwachen Differentialgleichung für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und Koeffizienten $a_{ij}, b_i.c_i, d \in L^\infty(\Omega)$, wobei der Raum der Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ durch $W_0^{1,2}(\Omega)$ ersetzt werden soll.

Aufgabe 43 **[Approximation von Sobolevfunktionen im Halbraum]**

Beweisen Sie: Für $\Omega := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ und $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, gibt es $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ für $m \to \infty$.

Hinweis: Wählen Sie einen Faltungskern $\eta \in C_0^\infty(B_1(0) \cap [\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)])$ und argumentieren Sie dann wie in der Vorlesung im Beweis von Proposition 3.19 (ii).

Aufgabe 44

[Eigenschaften von Differenzenquotienten]

Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ die folgenden Eigenschaften von Differenzenquotienten $\triangle_h^{e_l} \equiv \triangle_h$, $e_l \in S^{n-1}, l \in \{1, \ldots, n\}, h \neq 0$:

(i)

$$\triangle_h(uv)(x) = (\triangle_h u)(x)v(x) + u_h(x)\triangle_h v(x) = (\triangle_h u)(x)v_h(x) + u(x)\triangle_h v(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$, $|h| < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, wobei für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f_h(x) := f(x+h)$$

gesetzt wurde.

(ii) Falls u oder v kompakten Träger in Ω haben, dann gilt für $|h| \ll 1$

$$\int_\Omega u(x)\triangle_h v(x)\,dx = -\int_\Omega \triangle_{-h} u(x)v(x)\,dx.$$
