Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 12 vom 19.1.2006

Aufgabe 45 **[Stetige Fortsetzung]**

Seien X ein normierter Vektorraum, Y ein Banachraum und $Z \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(i) Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : Z \to Y$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$ besitzt.

(ii) Beweisen Sie, dass es zu $T \in L(Z,Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X,Y)$ gibt.

Hinweis: Das *Prinzip der eindeutigen stetigen Fortsetzung* wurde wiederholt in der Vorlesung benutzt, siehe z.B. die Beweise von Lemma 3.17, Satz 3.21 (ii) und Satz 3.25.

Aufgabe 46 **[Produkt- und Kettenregel für Sobolevfunktionen]**

Beweisen Sie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Dann gilt

(i) Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $1 \le p, q, r \le \infty$ und

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

ist $uv \in W^{1,r}(\Omega)$, und es gilt

$$D(uv) = (Du)v + u(Dv).$$

Hinweis: Approximieren Sie u und v zunächst mit glatten Funktionen gemäß Proposition 3.19 (i), und behandeln Sie den Fall $p, q < \infty$ zuerst. Falls $p = \infty$ oder $q = \infty$, unterscheiden Sie zwischen den Fällen $r > 1$ und $r = 1$.

(ii) Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, ist $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$, und es gilt

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Hinweis: Approximieren Sie u zunächst mit glatten Funktionen u_m.

Aufgabe 47 **[Fortsetzung von Funktionen]**

Für $u : \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei

$$E_0u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{für } t \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y,-it) & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i (-i)^m = 1 \qquad \text{für alle } m = 0,\ldots,k, \tag{1}$$

gelten soll.

(i) Zeigen Sie, dass (1) genau eine Lösung $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+1})$ besitzt.

(ii) Beweisen Sie, dass für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$

$$E_0u \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

gilt (vgl. den Beweis von Satz 3.25 der Vorlesung).

Aufgabe 48

(i) Zeigen Sie, dass für $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und beliebiges $\theta \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$u_\varepsilon := \sqrt{(u+\theta\varepsilon)^2 + \varepsilon^2} - \sqrt{(\theta\varepsilon)^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

in $W^{1,1}(\Omega)$ sind, und beweisen Sie, dass $u_\varepsilon \to |u|$ in $L^1(\Omega)$ und

$$Du_\varepsilon \to Du \cdot \begin{cases} 1 & \text{auf } \{u > 0\} \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} & \text{auf } \{u = 0\} \\ -1 & \text{auf } \{u < 0\} \end{cases}$$

in $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$ (vgl. den Beweis von Korollar 3.23 der Vorlesung).

(ii) Zeigen Sie, dass für $u_m, u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ für $m \to \infty$ auch die Konvergenz

$$\min\{u_m, c\} \to \min\{u, c\} \quad \text{für } m \to \infty \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. den Beweis von Proposition 3.27 der Vorlesung).

Hinweis: Machen Sie sich mit Hilfe von Korollar 3.23 der Vorlesung zunächst klar, dass die Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ sind.

(iii) Für $B_1^+ := B_1(0) \cap [\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)] \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in W^{1,p}(B_1^+)$ sei

$$E_+u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{für } t \geq 0 \\ u(y,-t) & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

eine Fortsetzung auf $B_1(0)$. Zeigen Sie, dass für $u_m \in C^\infty(\overline{B_1^+})$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(B_1^+)$ für $m \to \infty$ die Folge $\{E_+u_m\}$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,p}(B_1(0))$ ist.
