Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 13 vom 30.1.2006

Aufgabe 49 **[Poincaré Ungleichungen]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie:

(i) Falls Ω zusammenhängend ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n,p,\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |u - \bar{u}_\Omega|^p \, dx \leq C(n,p,\Omega) \int_\Omega |Du|^p \, dx \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei wir

$$\bar{u}_\Omega := \fint_\Omega u(x)\, dx = \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, dx$$

gesetzt haben.

(ii) Sei $\alpha > 0$, Ω zusammenhängend und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n,p,\Omega,\alpha)$, so dass

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq C(n,p,\Omega,\alpha) \int_\Omega |Du|^p \, dx \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ mit } \mathscr{L}^n(\{u=0\}) \geq \alpha.$$

(iii) Es gibt eine Konstante $C = C(n,p,\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega u^p \, dx \leq C(n,p,\Omega) \int_\Omega |Du|^p \, dx \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Zeigen Sie abschließend, dass man für $\Omega = B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$ die Konstanten $C = C(n,p)R^p$ in (i) und (iii), bzw. $C = C(n,p,\alpha)R^p$ in (ii) wählen kann.

Aufgabe 50 **[Beispiele zu den Einbettungssätzen]**

(i) Zeigen Sie, dass keine stetige Einbettung des Raumes $W^{1,n}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ existiert (vgl. mit dem Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 3.35 der Vorlesung).

Hinweis: Betrachten Sie dazu z.B. die Funktion

$$u(x) := \log(1 + |\log|x||) \quad \text{für } x \in B_1(0).$$

(ii) Diskutieren Sie die Funktion

$$u(x) := \frac{|\log|x||^{1/4}}{1+|x|^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

für unterschiedliche Dimensionen n im Hinblick auf den Morreyschen Einbettungssatz, Satz 3.37 der Vorlesung.

Aufgabe 51 **[Ungleichungen am Rand im $W^{1,p}$-Sinne]**

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, und

$$M := \sup_{\partial\Omega} u_+ = \inf\{t \in \mathbb{R} : (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

(vgl. mit der Formulierung des schwachen Maximumprinzips für Divergenzform-Operatoren, Satz 4.3 der Vorlesung).

Zeigen Sie

(i) $M \ge 0$

(ii) Falls $(u_+ - t)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, dann gilt $(u_+ - s)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für alle $s \ge t$.

Aufgabe 52 **[Schwache Konvergenz]**

Sei X ein Banachraum mit seinem Dualraum X^*, dann heißt eine Folge $(x_k) \subset X$ *schwach konvergent* gegen $x \in X$ ("$x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \to \infty$"), wenn

$$\langle l, x_k \rangle_{X^* \times X} := l(x_k) \to l(x) = \langle l, x \rangle_{X^* \times X} \qquad \text{für alle } \ l \in X^*.$$

Die Konvergenz $x_k \to x$ bezüglich der Norm in X nennen wir im Folgenden auch *starke Konvergenz* – sie wird oft auch als *Normkonvergenz* bezeichnet.

Zeigen Sie:

(i) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(ii) Die Norm in X ist *schwach unterhalbstetig*, d.h. es gilt

$$x_k \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X .$$

(iii) Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform. Zeigen Sie: Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X, dann gilt

$$B(x,x) \le \liminf_{k\to\infty} B(x_k, x_k).$$
