Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 2 vom 26.10.2005

Aufgabe 5 **[Monotonie des Mittelwertintegrals]**

Beweisen Sie: Sei $u \in C^2(\Omega)$ und für alle $x_0 \in \Omega$ sei die Funktion

$$\phi_{x_0}(r) := \fint_{\partial B_r(x_0)} u(\zeta)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\zeta), \quad r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)),$$

monoton wachsend (bzw. fallend) in r, dann ist u subharmonisch (bzw. superharmonisch) in Ω (vgl. Satz 1.7 der Vorlesung).

Aufgabe 6 **[Minimumprinzipien für superharmonische Funktionen]**

Formulieren und beweisen Sie ein starkes und anschließend ein schwaches Minimumprinzip für superharmonische Funktionen auf zusammenhängenden bzw. beschränkten Gebieten (vgl. Korollare 1.8 und 1.9 der Vorlesung).

Aufgabe 7 **[Randwerte erzwingen Vorzeichen]**

Beweisen Sie Bemerkung 1.10 aus der Vorlesung: Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein $g \in C^0(\partial\Omega)$ mit $g \leq 0$, aber $g \not\equiv 0$ löst, dann ist $u < 0$ in Ω.

Aufgabe 8 **[Satz von Liouville]**

Beweisen Sie mit Hilfe der Harnack-Ungleichung auf Bällen ((1.13) aus Satz 1.17 der Vorlesung), dass eine nach unten beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ konstant ist.
