Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 3 vom 3.11..2005

Aufgabe 9 **[Homogene harmonische Funktionen]**

Seien $u, v \in C^2(\overline{B_1(0)})$ harmonische Funktionen, die zusätzlich die folgenden *Homogenitätsrelationen* erfüllen:

$$u(tx) = t^a u(x) \quad \text{und} \quad v(tx) = t^b v(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{B_1(0)},\ t > 0,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.

Zeigen Sie:

$$\fint_{\partial B_1(0)} u(\zeta)v(\zeta)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\zeta) = 0.$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Greenschen Formeln.)

Aufgabe 10 **[Poisson-Integralformel für den Ball]**

Beweisen Sie Satz 1.26 der Vorlesung: Für $g \in C^0(\partial B_r(0))$ und

$$\begin{aligned} v(x) \quad &:= \quad \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(\zeta)}{|x-\zeta|^n}\, d\mathscr{H}^{n-1}(\zeta) \\ &=: \quad \int_{\partial B_r(0)} K(x,\zeta) g(\zeta)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\zeta), \quad x \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

gilt

(i) $v \in C^\infty(B_r(0))$

(ii) $\Delta v = 0$ in $B_r(0)$

(iii)

$$\lim_{B_r(0) \ni x \to \zeta} v(x) = g(\zeta) \quad \text{für alle } \zeta \in \partial B_r(0).$$

Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 1.25 der Vorlesung vor. Die Relation

$$1 = \int_{\partial B_r(0)} K(x,\zeta)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\zeta)$$

lässt sich aber ohne explizite Rechnung direkt mit Satz 1.20 (angewandt auf $\Omega := B_r(0)$ und $u \equiv 1$ auf Ω) herleiten.

Aufgabe 11 **[Fundamentallemma der Variationsrechnung]**

Beweisen Sie mit Hilfe von Faltungen Lemma 1.29 aus der Vorlesung: Für alle $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)\, dx \geq 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega),\ \eta \geq 0, \tag{1.21}$$

gilt $f \geq 0$ fast überall in Ω. Falls

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.22}$$

so folgt $f = 0$ fast überall in Ω.

Aufgabe 12 **[1D-Wärmeleitungsgleichung]**

Sei $n = 1$ und $u(x,t) := v(x^2/t)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $u_t = u_{xx}$ genau dann, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, \quad z > 0. \tag{1}$$

(ii) Die Lösungen von (1) haben die Gestalt

$$v(z) := c\int_0^z e^{-s/4}s^{-1/2}\,ds + d, \quad c,d \in \mathbb{R}.$$

(iii) Differenzieren Sie $v(x^2/t)$ nach x und normieren Sie durch geeignete Wahl der Konstanten c, um eine Fundamentallösung Φ für $n = 1$ zu erhalten.
