Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 4 vom 9.11.2005

Aufgabe 13 **[Homogene Wärmeleitungsgleichung]**

Beweisen Sie folgende Verschärfung von Satz 1.31: Für $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$|g(x)| \leq Me^{|x|^\alpha}$$

für $M \geq 0$, $\alpha < 2$ und

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

gilt:

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(iii)
$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(x_0) \qquad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(Hinweis: Für (i) dürfen Sie sich auf den Nachweis der Existenz einer Ableitung beschränken, höhere Ableitungen werden analog behandelt.)

Aufgabe 14 **[“Heat Balls”]**

Für

$$\Phi(\xi,\tau) := \begin{cases} (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/(4\tau)} & \text{für } \tau > 0 \\ 0 & \text{für } \tau \leq 0, \end{cases}$$

definiere den “heat ball” $E_r(x,t)$ vom Radius $r > 0$ um $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ durch

$$E_r(x,t) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t-s,\ \Phi(x-y,t-s) \geq r^{-n}\}.$$

Zeigen Sie:

(i)
$$\partial E_r(x,t) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t-s,\ \Phi(x-y,t-s) = r^{-n}\} \cup \{(x,t)\}$$

(ii) Falls $r \to 0$, dann gilt $E_r(x,t) \to (x,t)$, d.h.

$$\text{für alle } \varepsilon > 0\ \exists\, r(\varepsilon) > 0 : \text{ für alle } 0 < r \leq r(\varepsilon) : E_r(x,t) \subset B_\varepsilon(x) \times (t-\varepsilon, t).$$

(iii) $E_r(x,t)$ ist rotationssymmetrisch bezüglich der Achse $\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = x\}$, d.h. es gilt für alle orthogonalen Matrizen $R \in O(n)$

$$\tilde{R}(E_r(x,t) - (x,t)) + (x,t) = E_r(x,t),$$

wobei

$$\tilde{R} := \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Aufgabe 15

Beweisen Sie:

$$\int\int_{E_1} \frac{|z|^2}{\sigma^2}\, dz d\sigma = 4, \tag{1}$$

wobei

$$E_1 := \{(z,\sigma) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sigma > 0, \Phi(z,\sigma) \geq 1\}.$$

(Hinweis: Die Identität (1) wurde am Schluss des Beweises von Satz 1.36 und im Beweis des starken Maximumprinzips, Satz 1.37 (i), verwendet. Versuchen Sie, den Integrationsbereich geeignet nach dem Cavalierischen Prinzip zu zerlegen und verwenden Sie Polarkoordinaten. Das dann entstehende Integral lässt sich mit der Substitution $\tau := -\log 4\pi\sigma$ auf die Gamma-Funktion reduzieren.)

Aufgabe 16 **[Wärmeleitungsgleichung mit Term nullter Ordnung]**

Finden Sie eine explizite Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ gegeben ist. (Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) := v(x,t)\psi(t)$, wobei v die Ihnen aus der Vorlesung (Bem. 1.34) bekannte Lösung der inhomogene Wärmeleitungsgleichung ohne Term nullter Ordnung ist.)