Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 5 vom 16.11.2005

Aufgabe 17 **[Homogene Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension]**

Bestimmen Sie die Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } (0,1) \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times [0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \{1\} \times [0,\infty) \end{cases}$$

durch den *Separationsansatz*

$$u(x,t) := v(t)w(x), \qquad \text{für } x \in (0,1),\ t \geq 0.$$

Aufgabe 18 **[Nichtlineare Diffusionsgleichung]**

Betrachten Sie die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty),$$

wobei $\gamma > 1$ eine gegebene Konstante ist und $u \geq 0$ gesucht wird.

(i) Suchen Sie eine Lösung mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) := v(t)w(x), \quad w(x) := |x|^a$$

für ein geeignet zu wählendes $a = a(\gamma)$. Geben Sie für $\gamma := 3/2$ die Lösung explizit an.

(ii) Suchen Sie eine Lösung mit dem Skalierungsansatz

$$u(x,t) := \frac{1}{t^\alpha} v(x/t^\beta), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

wobei

$$\alpha := \frac{n}{n(\gamma-1)+2}, \qquad \text{und} \qquad \beta := \frac{1}{n(\gamma-1)+2}$$

zu wählen ist. (Hinweis: Gehen Sie vor wie in der Vorlesung bei der Herleitung der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, indem Sie zusätzlich annehmen, dass $v(y) = w(|y|)$ mit

$$\lim_{r\to\infty} w = \lim_{r\to\infty} w' = 0.$$

Aufgabe 19 **[Hamilton-Jacobi-Gleichung]**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ Du = a & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \\ u(0,0) = b \end{cases}$$

für einen gegebenen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$ mit einer Funktion $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch den Separationsansatz

$$u(x,t) := w(x) + v(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$

Aufgabe 20 **[Wärmeleitungsgleichung versus Wellengleichung]**

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \\ u_t = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

wobei $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gegeben ist. Außerdem sei

$$u(x,t) := u(x,-t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$v(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x,s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \lim\limits_{t\to+0} v = g & \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

erfüllt.
