Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 6 vom 23.11.2005

Aufgabe 21 **[1D-Wellengleichung im Halbraum]**

Lösen Sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u = g & \text{auf } (0,\infty)\times\{t=0\} \\ u_t = h & \text{auf } (0,\infty)\times\{t=0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x=0\}\times(0,\infty) \end{cases}$$

für gegebene Funktionen $g \in C^2([0,\infty)$ und $h \in C^1([0,\infty))$ mit $g(0) = h(0) = 0$. Erläutern Sie abschließend, dass die Lösung u nur in C^2 ist, wenn $g''(0) = 0$.

Hinweis: Setzen Sie die Funktionen $u(.,t), g, h$ durch ungerade Spiegelung an der Achse $\{x = 0\}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort und nutzen Sie dann die D'Alembertsche Formel (1.35) aus der Vorlesung, um die in der Vorlesung angegebene Lösungsformel (1.36) herzuleiten.

Aufgabe 22 **[Maxwell- versus Wellengleichung]**

Zeigen Sie, dass jede Komponente des elektrischen Feldes $E \in C^2(\mathbb{R}^3\times(0,\infty),\mathbb{R}^3)$ und des magnetischen Feldes $B \in C^2(\mathbb{R}^3\times(0,\infty),\mathbb{R}^3)$, welche das System der *Maxwell-Gleichungen*

$$\begin{cases} E_t = \nabla\times B \\ B_t = -\nabla\times E \\ \nabla\cdot B = 0 \\ \nabla\cdot E = 0 \end{cases}$$

lösen, eine Lösung der Wellengleichung

$$\Box u = u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty)$$

ist.

Aufgabe 23 **[Kinetische und Potentielle Energie für die 1D-Wellengleichungg]**

Die Funktion $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei die Funktionen $g \in C^1(\mathbb{R})$ und $h \in C^0(\mathbb{R})$ kompakten Träger haben. Die zugehörige *kinetische Energie* $k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und die *potentielle Energie* $p : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx \quad \text{und} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx.$$

Beweisen Sie, dass

(i) $k + p \equiv const.$ auf $[0,\infty)$.

(ii) $k(t) = p(t)$ für alle t genügend groß.

Aufgabe 24

Beweisen Sie Lemma 1.49 aus der Vorlesung:

Für $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, gilt:

(i)
$$\partial_r^2 (r^{-1}\partial_r)^{k-1}(r^{2k-1}\phi(r)) = (r^{-1}\partial_r)^k (r^{2k}\phi_r(r)).$$

(ii)
$$(r^{-1}\partial_r)^{k-1}(r^{2k-1}\phi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \partial_r^j \phi(r),$$

wobei die Konstanten $\beta_j^k (j = 0,\dots,k-1)$ unabhängig von ϕ sind.

(iii) $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$.

Hinweis: Zeigen Sie (i) zunächst nur für Polynome, für allgemeine Funktionen können Sie die Taylor-Formel benutzen.
