Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I Serie 7 vom 1.12.2005

Aufgabe 25 **[1D-Wellengleichung revisited]**

(i) Zeigen Sie, dass jede Lösung v von

$$\partial_\xi \partial_\eta v = 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

die allgemeine Form

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

hat.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Transformation $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, dass für $u(x,t) := v(\xi, \eta)$ die Differentialgleichung

$$\Box u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

genau dann gilt, wenn $\partial_\xi \partial_\eta v = 0$.

(iii) Leiten Sie mit Hilfe von (i) und (ii) die D'Alembertsche Formel (1.35) aus der Vorlesung für die Lösung von

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

her, wobei $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$ gegeben sind.

Aufgabe 26 **[Schwaches Maximumprinzip und Gegenbeispiele]**

(i) Zeigen Sie (vgl. Satz 2.2 der Vorlesung): Falls für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$,

$$Lu = a_{ij} \partial_{ij} u + b_i \partial_i u \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit (a_{ij}) positiv semidefinit, und falls ein $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass $a_{kk} > 0$ in Ω und so dass der Ausdruck $|b_k|/a_{kk}$ auf Ω beschränkt ist, dann gilt

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Beweisen Sie, dass das schwache Maximumprinzip für lineare elliptische Operatoren L mit $c = 0$ (Satz 2.2 der Vorlesung) im Allgemeinen nicht auf unbeschränkten Gebieten gilt.

(iii) Beweisen Sie, dass das schwache Maximumprinzip für lineare elliptische Operatoren L nicht gilt, falls $c > 0$ ist (vgl. mit Satz 2.3 der Vorlesung).

Aufgabe 27 **[Vergleichsprinzip für lineare elliptische Operatoren]**

Sei L ein linearer elliptischer Differentialoperator wie in Definition 2.1 der Vorlesung mit $c \leq 0$ auf $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $Lu \geq Lv$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$ die Ungleichung

$$u \leq v \quad \text{in } \Omega.$$

Aufgabe 28

[Stetige Abhängigkeit von rechter Seite und Randdaten]

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ erfülle

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei L ein linearer elliptischer Operator (Def. 2.1 der Vorlesung) mit $c \leq 0$ ist. Dann gilt:

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \|\phi\|_{C^0(\partial\Omega)} + (e^{ad} - 1)\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})},$$

wobei $d := \operatorname{diam}\Omega$ und

$$a := \frac{\Lambda}{2}\left[\|b\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sqrt{\|b\|^2_{C^0(\overline{\Omega})} + \frac{4}{\Lambda}}\right].$$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^1 \leq d\}$ und zeigen Sie für $v(x) := e^{ad} - e^{ax^1}$, dass $L(u - \|\phi\|_{C^0(\partial\Omega)} - v\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}) \geq 0$.
