Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 8 vom 7.12.2005

Aufgabe 29

Beweisen Sie: Für $A = (a^{ij}) : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $A(x)$ positiv semi-definit für jedes $x \in \Omega$, und $u \in C^2(\Omega)$ besitze in $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) \leq 0.$$

Hinweis: Führen Sie die Aussage zunächst auf den Fall zurück, dass A symmetrisch ist.

Aufgabe 30 **[Linearer parabolischer Differentialoperator mit beschränktem c]**

Zeigen Sie: Für $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ mit

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \\ u = g & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei c beschränkt und $g \geq 0$ ist, gilt:

$$u \geq 0 \quad \text{in } \overline{\Omega_T}.$$

Hinweis: Welche Gleichung erfüllt $v := e^{\lambda t}u$?

Aufgabe 31 **[Gegenbeispiel zur Lokalisierung von Maxima bei Unterlösungen parabolischer Operatoren]**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) := x^2 + (t-2)^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty),$$

ein Gegenbeispiel zur Lokalisierung von Maxima von Unterlösungen linearer parabolischer Operatoren, Lemma 2.13 der Vorlesung, liefert. Betrachten Sie dazu den Wärmeleitungsoperator und diskutieren Sie, warum in dieser Situation die Voraussetzungen des Lemmas 2.13 nicht erfüllt sind.

Aufgabe 32

[Lokalisierung von Maxima revisited]

Beweisen Sie (vgl. Lemma 2.13 aus der Vorlesung): Sei $E \subset \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ offen und beschränkt, und $u \in C_1^2(E) \cap C^0(\overline{E})$ erfülle

$$u_t - Lu \leq 0 \quad \text{in } E,$$

wobei L ein elliptischer Operator mit $c \equiv 0$ in E ist. Weiterhin sei $C \subset\subset E$ konvex mit $\partial C \in C^2$, und es gebe einen Punkt $(x_1,t_1) \in \partial C$ mit

$$u < u(x_1,t_1) = \max_{\overline{E}} u \quad \text{in } C.$$

Dann ist die Tangentialebene $T_{(x_1,t_1)}\partial C$ von ∂C in (x_1,t_1) gegeben durch

$$T_{(x_1,t_1)} = \{(y,t_1) : y \in \mathbb{R}^n\}.$$