Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Simon Blatt

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen I
Serie 9 vom 15.12.2005

Aufgabe 33 **[Starkes Maximumprinzip für $\partial_t - L$ mit $c \leq 0$]**

Beweisen Sie: Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$. Die Funktion $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ erfülle

$$u_t - Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T,$$

wobei L ein linearer elliptischer Operator im Sinne von Definition 2.1 der Vorlesung ist, hier mit $c \leq 0$. Falls $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ mit

$$u(x_1,t_1) = \max_{\overline{\Omega_T}} u \geq 0$$

existiert, dann gilt

$$u \equiv u(x_1,t_1) \quad \text{in } \overline{\Omega_{t_1}}.$$

Hinweis: Es genügt, die Beweise der Lemmata 2.13 und 2.15 der Vorlesung zu modifizieren.

Aufgabe 34 **[Nichteindeutigkeit]**

Zeigen Sie, dass die Anfangs-/Randwertaufgabe

$$\begin{cases} u_{xx} - t u_t + 2u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

mit $\Omega_T := (0,\pi) \times (0,1]$ ein ganzes Kontinuum von Lösungen in $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ besitzt. Warum ist Korollar 2.19 der Vorlesung nicht anwendbar? Hinweis: Machen Sie einen Separationsansatz.

Aufgabe 35 **[Maximumprinzip]**

Gilt für die Differentialgleichung

$$u_t - x u_{xx} = 0 \quad \text{in } (-1,1) \times (0,1/2]$$

ein Maximumprinzip (vgl. Satz 2.11)? Betrachten Sie dazu z.B. die Funktion $u(x,t) := -(x^2 + 2xt)$.

Aufgabe 36

[Raum der beschränkten skalaren Funktionen]

S sei eine Menge und $B(S)$ der Raum aller auf S beschränkten skalaren Funktionen. Zeigen Sie, dass $(B(S), \|.\|_{B(S)})$ ein Banachraum ist, wobei

$$\|f\|_{B(S)} := \sup_{s \in S} |f(s)|$$

die auf $B(S)$ definierte Norm ist.
