Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung II
Serie 1 vom 19.4.2010

Aufgabe 1 **[Lokale Minimierer sind schwache Extremalen]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ und $F \in C^2(\mathscr{U})$, wobei $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n}$ eine offene Umgebung des 1-Graphen

$$\{(x, u(x), Du(x)) : x \in \bar{\Omega}\}$$

ist, und sei $\mathscr{F}(v) := \int_\Omega F(x, v(x), Dv(x))\, dx$ das zu F gehörige Integralfunktional.

Zeigen Sie: Falls für jedes $x \in \Omega$ eine Zahl $r = r(x) > 0$ existiert, so dass es für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x), \mathbb{R}^N)$ ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi) > 0$ gibt, für welches der Ausdruck $\mathscr{F}(u + \varepsilon\varphi)$ für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ wohldefiniert ist und der Ungleichung

$$\mathscr{F}(u) \le \mathscr{F}(u + \varepsilon\varphi) \qquad \text{für alle } \ |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

genügt, dann ist u eine schwache Extremale von $\mathscr{F}$.

Hinweis: Benutzen Sie für eine allgemeine Testfunktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine geeignete Zerlegung der Eins, deren Existenz Sie nicht nachweisen müssen.

Aufgabe 2 **[Poisson-Gleichung für glatte Daten]**

Zeigen Sie, dass für eine gegebene Funktion $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 3$, das *Newton-Potential*

$$u(x) := -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy, \quad \omega_{n-1} := \mathscr{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

von der Klasse $C^2(\mathbb{R}^n)$ ist und die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ löst.

Hinweis: Die Glattheitsaussage beweist man zum Beispiel mit dem Bilden von Differenzenquotienten, und für den Nachweis der Poisson-Gleichung schneidet man die Singularität mit kleinen Bällen zunächst heraus.

Aufgabe 3 **[PDEs mit Variationsstruktur]**

Welche der folgenden partiellen Differentialgleichungen besitzt eine Variationsstruktur? Geben Sie in dem Fall das jeweilige Variationsintegral an, dessen Euler-Lagrange-Gleichung mit der gegebenen Differentialgleichung übereinstimmt.

$$-\Delta u = u^3 - \lambda u \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^4 \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}, u : \Omega \to \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$-\Delta u = u|u|^{p-1} + g(u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ für } p \geq 1, g \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), u : \Omega \to \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$-\Delta u + (u_{xy})^2 = 1 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ für } u : \Omega \to \mathbb{R}; \tag{3}$$

$$-\Delta\Delta u = \lambda \Delta u + f(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}, f \in L^\infty(\Omega), u : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{4}$$

Aufgabe 4 **[Fundamentallemma mit Nebenbedingung]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in L^1(\Omega)$ erfüllen die Bedingung

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = \lambda g(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$
