Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

# Übungen zur Vorlesung
# Variationsrechnung II
# Serie 2 vom 29.4.2010

---

## Aufgabe 5 **[Innere Variationen – Dirichlet Integral]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ offen, $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ erfülle $\partial\mathscr{D}(u,\lambda) = 0$ für alle Vektorfelder $\lambda \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Zeigen Sie: Die Funktion $f(\zeta) := a(Du(x,y)) - ib(Du(x,y))$ für $\zeta = x + iy \in \Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ist holomorph in $\Omega$. Hierbei ist $a(p) := |p_1|^2 - |p_2|^2$ und $b(p) := 2p_1 \cdot p_2$ für $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^{N\times 2}$.

*Hinweis: Man zeigt für in $\Omega$ genügend glattes $u$, dass die Funktionen $a$ und $b$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, während man für $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ mit Faltungen $\lambda_\varepsilon$ arbeitet, um zu zeigen, dass zumindest die geglätteten Funktionen $a_\varepsilon$ und $b_\varepsilon$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, bevor man zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergeht.*

---

## Aufgabe 6 **[Parameterinvarianz und Homogenität]**

(i) Zeigen Sie, dass für $F \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ die positive 1-Homogenität,

$$F(z, tY) = tF(z,Y) \qquad \text{für alle } t > 0, \tag{H}$$

impliziert, dass das zugehörige Variationsintegral

$$\mathscr{F}_\Omega(u) := \int_\Omega F(u(x,y), u_x(x,y) \wedge u_y(x,y))\, dxdy, \quad \Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$$

parameterinvariant ist, d.h. $\mathscr{F}_\Omega(u) = \mathscr{F}_{\Omega^*}(u \circ \tau)$ für alle orientierungserhaltenden $C^1$-Diffeomorphismen $\tau : \bar{\Omega}^* \to \bar{\Omega}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes parameterinvariante Funktional

$$\mathscr{G}_\Omega(u) := \int_\Omega G(x,y,u(x,y), Du(x,y))\, dxdy,$$

$\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$, $G \in C^0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3\times 2})$, eine Funktion $G_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $G(x,y,z,p) = G_0(z,p)$ für alle $(x,y) \in \Omega$.

*Hinweis: man kann sogar zeigen, dass $G(x,y,z,pa) = \det a \cdot G(\xi, \eta, z, p)$ für alle $(x,y), (\xi, \eta) \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $a \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det a > 0$.*

---

## Aufgabe 7 **[Lipschitzfortsetzung und harmonische Fortsetzung von Randwerten]**

(i) Sei $f \in C^{0,1}(E,\mathbb{R}^N)$ eine Lipschitzabbildung mit Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}_{f,E}$, d.h. es gilt

$$|f(x)-f(y)| \leq \mathrm{Lip}_{f,E}|x-y| \qquad \text{für alle } \; x,y \in E \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie dass es eine lipschitzstetige Fortsetzung $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ von $f$ gibt, so dass neben $F|_E = f$ auch $\mathrm{Lip}_{F,\mathbb{R}^n} \leq C(N)\mathrm{Lip}_{f,E}$.

(ii) Nutzen Sie Aussage (i), um zu zeigen, dass für eine rektifizierbare geschlossene Jordankurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ die in der Vorlesung definierte Zulässigkeitsklasse

$$\mathscr{C}(\Gamma) := \{v \in W^{1,2}(B,\mathbb{R}^3) : v|_{\partial B} : \partial B \xrightarrow[\text{schwach monoton}]{\text{stetig, surjektiv}} \Gamma\}$$

nicht leer ist.

(iii) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine rektifizierbare geschlossene Jordankurve der Länge $\mathscr{L}(\Gamma) = L > 0$ mit der Bogenlängenparametrisierung $\varphi_\Gamma : S_L \simeq (\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \to \Gamma$. Beweisen Sie die Existenz einer harmonischen Fortsetzung der Randwerte, d.h. einer Funktion $h \in C^2(B,\mathbb{R}^3)$ mit $\Delta h = 0$ in $B$ und $h|_{\partial B} = \tilde{\varphi}$, wobei $\tilde{\varphi} : \mathbb{S}^1 \to \Gamma$ eine geeignete Reparametrisierung von $\Gamma$ mit konstanter Geschwindigkeit ist.

*Hinweis: Für skalare Funktionen g in (i) ist der Ansatz $G(x) := \inf_{z\in E}\{g(z) + \mathrm{Lip}_{g,E}|z-x|\}$ hilfreich. In (iii) kann die Reparametrisierung $\tilde{\varphi} \in C^{0,1}(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ mit Aussage (i) zu einer lipschitzstetigen Funktion $\tilde{\Phi}$ auf $\bar{B} \subset \mathbb{R}^2$ fortsetzen, um dann mit einer direkten Methode das Dirichletintegral $\mathscr{D}$ in der Zulässigkeitsklasse $\{w \in W^{1,2}(B,\mathbb{R}^3) : w - \tilde{\Phi} \in W_0^{1,2}(B,\mathbb{R}^3)\}$ zu minimieren. Sie dürfen dann ohne Beweis annehmen, dass der Minimierer von der Klasse $C^2(B,\mathbb{R}^3)$ ist.*

---

## Aufgabe 8 **[Konforme Invarianz]**

Zeigen Sie, dass das Dirichletintegral $\mathscr{D}$ konform invariant ist, d.h.

$$\mathscr{D}_B(u) = \mathscr{D}_\Omega(u \circ \tau) \qquad \text{für alle } \; \text{konformen Abbildungen } \tau : \bar{\Omega} \to \bar{B},$$

wobei $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Omega = \tau^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^2$. Dabei ist eine konforme Abbildung $\tau$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismums von der Klasse $C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^2)$ mit $\det D\tau > 0$, deren Komponenten $\tau^1$, $\tau^2$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen: $\tau^1_x = \tau^2_y$ und $\tau^1_y = -\tau^2_x$ für $(x,y) \in \Omega$.

---