Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

# Übungen zur Vorlesung
# Variationsrechnung II
# Serie 3 vom 20.5.2010

---

## Aufgabe 9 **[Iterationslemma]** Zeigen Sie:

Sei $f;[r_1,r_2] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative beschränkte Funktion, $0 \le r_1 < r_2 < \infty$, so dass für Konstanten $A, B, \alpha \ge 0$ und $\theta \in [0,1)$ die Beziehung

$$f(t) \le \theta f(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B \qquad \text{für alle } \; r_1 \le t < s \le r_2 \tag{1}$$

gilt. Dann existiert eine von $\theta$ und $\alpha$ abhängige Konstante $c \ge 0$, so dass

$$f(\rho) \le c\left[\frac{A}{(R-\rho)^\alpha} + B\right] \qquad \text{für alle } \; r_1 \le \rho < R \le r_2.$$

*Hinweis: Betrachten Sie für einen geeigneten Parameter $\tau \in (0,1)$ die Folge von Parametern $t_0 := \rho$ und $t_{k+1} - t_k := (1-\tau)\tau^i(R-\rho)$ und benutzen Sie (1) iterativ.*

---

## Aufgabe 10 **[Harmonische Fortsetzung auf der Einheitskreisscheibe]** Sei $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ mit Radius $R \in (0,1]$.

(i) Drücken Sie den Laplace-Operator in Polarkoordinaten $(r,\theta)$ um den Ursprung aus und zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_k(r,\theta) := \left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

harmonisch in $B_R(0)$ sind.

(ii) Zeigen Sie unter der Bedingung, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty,$$

dass die Funktion

$$u(r,\theta) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

von der Klasse $C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^\infty(B_R(0))$ und harmonisch in $B_R(0)$ ist.

(iii) Weisen Sie nach, dass

$$\mathscr{D}(u) := \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} |Du|^2\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2)$$

(iv)* Finden Sie ein Beispiel von Randwerten $v|_{\partial B_R(0)}$, deren harmonische Fortsetzung auf $B_R(0)$ *nicht* von der Klasse $W^{1,2}(B_R(0))$ ist.

*Hinweis: Für Teil (iii) ist es natürlich ratsam, auch das Dirichlet Integral in Polarkoordinaten darzustellen.*

---

Aufgabe 11 **[**JORDAN**-Kurve]** Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Jordankurve, d.h. das homöomorphe Bild der Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$ im $\mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\lambda(\varepsilon) > 0$, so dass für alle Punkte $P, S \in \Gamma$ mit $|P - S| < \lambda(\varepsilon)$ der Diameter des kürzeren Kurvenbogens $\Gamma_{\text{kurz}}(P,S)$ auf $\Gamma$, der $P$ mit $S$ verbindet, echt kleiner als $\varepsilon$ ist: $\operatorname{diam}\Gamma_{\text{kurz}}(P,S) < \varepsilon$.

---

Aufgabe 12 **[**SOBOLEV-POINCARÉ **Ungleichung]**

Zeigen Sie:

Für alle $p \in [1,n)$ existiert eine Konstante $C = C(p,n)$, so dass

$$\left( \fint_{B_r(x)} |u(y) - \bar{u}_{B_r(x)}|^{p^*}\, dy \right)^{1/p^*} \leq Cr \left( \fint_{B_r(x)} |Du(y)|^p\, dy \right)^{1/p} \forall B_r(x) \subset \mathbb{R}^n,\, u \in W^{1,p}(B_r(x)),$$

wobei für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$

$$\bar{f}_E := \fint_E f(y)\, dy := \frac{1}{\mathscr{L}^n(E)} \int_E f(y)\, dy$$

gesetzt wurde.

*Hinweis: Zeigen Sie zunächst für eine allgemeine Funktion $v \in W^{1,p}(B_r(x))$ die Ungleichung*

$$\left( \fint_{B_r(x)} |v|^{p^*}\, dy \right)^{1/p^*} \leq C \left[ r^p \fint_{B_r(x)} |Dv(y)|^p\, dy + \fint_{B_r(x)} |v(y)|^p\, dy \right]^{1/p}$$

*mit Hilfe der* SOBOLEV*-Ungleichung, die Sie auf die auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzte Funktion $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Forsetzungssatz, Satz 2.12 aus VarI) anwenden können, und wenden Sie anschließend die Ihnen bekannte* POINCARÉ*-Ungleichung (Korollar 2.10 (iii) aus VarI) auf $v(y) := u(y) - \bar{u}_{B_r(x)}$ an.*

---