Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung II Serie 4 vom 17.6.2010

Aufgabe 13 **[Nichtkompakte Einbettung]** Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Einbettung $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq q < 2n/(n-2)$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 14 **[Konvergenz fast überall]** Sei $\{v_k\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty]$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie die Existenz einer Teilfolge $\{v_{k_i}\} \subset \{v_k\}$, die für $i \to \infty$ $\mathscr{L}^n$-fast überall gegen eine Grenzfunktion $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Hinweis: Benutzen Sie auf Bällen $B_j(0) \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, die Kompaktheit der Rellichschen (oder Sobolevschen (Satz 2.8 in Variationsrechnung I)) Einbettung $W^{1,p}(B_j(0)) \hookrightarrow L^p(B_j(0))$.

Aufgabe 15 **[Variante des Lemmas von Brezis-Lieb]** Seien $u_k \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in (0,\infty)$, mit $u_k \to u$ $\mathscr{L}^n$-f.ü. und der gleichmäßigen Schranke $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Beweisen Sie die Aussage von Brezis-Lieb für $q \in (0,1]$ ohne den Konvergenzsatz von Vitali zu benutzen: Es gilt $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|u-u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} - \|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = o(1) \quad \text{für } k \to \infty.$$

(ii) Beweisen Sie für $q > 2$, dass

$$|u_k-u|^{q-2}(u_k-u) - |u_k|^{q-2}u_k + |u|^{q-2}u \to 0 \quad \text{in } L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \to \infty.$$

Hinweis: Für Teil (ii) können Sie genau so vorgehen wie in der Vorlesung beim Beweis des Lemmas von Brezis und Lieb, indem Sie die Differenz der ersten beiden Summanden durch die Hilfsfunktion $\varphi(t) := |t|^{q-2}t$ ausdrücken.

Aufgabe 16 **[Gegenbeispiele zu Vitali-Konvergenz]**

Geben Sie Beispiele von Funktionenfolgen $\{u_k\} \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in [1,\infty)$, mit $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1$, $u_k \to 0$ $\mathscr{L}^n$-f.ü., an, so dass mindestens eine der beiden Bedingungen, *gleichmäßig gleichgradige Absolutstetigkeit,* oder *gleichmäßig gleichgradige Integrabilität*, im Konvergenzsatz von Vitali verletzt ist.
