Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung II
Serie 1 vom 16.4.2018
Abgabedatum: 30.4.2018

Aufgabe 1 **[Nichtkompakte Einbettung]** Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Einbettung $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq q < 2n/(n-2)$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 2 **[Konvergenz fast überall]** Sei $\{v_k\} \subset W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $q \in (1,\infty]$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie die Existenz einer Teilfolge $\{v_{k_i}\} \subset \{v_k\}$, die für $i \to \infty$ $\mathscr{L}^n$-fast überall gegen eine Grenzfunktion $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Hinweis: Benutzen Sie auf Bällen $B_j(0) \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, die Kompaktheit der Rellichschen (oder Sobolevschen (Satz 2.8 in Variationsrechnung I)) Einbettung $W^{1,q}(B_j(0)) \hookrightarrow L^q(B_j(0))$.

Aufgabe 3 **[Variante des Lemmas von Brezis-Lieb]** Seien $u_k \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in (0,\infty)$, mit $u_k \to u$ $\mathscr{L}^n$-f.ü. und der gleichmäßigen Schranke $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Beweisen Sie die Aussage von Brezis-Lieb für $q \in (0,1]$ ohne den Konvergenzsatz von Vitali zu benutzen: Es gilt $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|u-u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} - \|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = o(1) \quad \text{für } k \to \infty.$$

(ii) Beweisen Sie für $q > 2$, dass

$$|u_k-u|^{q-2}(u_k-u) - |u_k|^{q-2}u_k + |u|^{q-2}u \to 0 \quad \text{in } L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \to \infty.$$

Hinweis: Für Teil (ii) können Sie genau so vorgehen wie in der Vorlesung beim Beweis des Lemmas von Brezis und Lieb, indem Sie die Differenz der ersten beiden Summanden durch die Hilfsfunktion $\varphi(t) := |t|^{q-2}t$ ausdrücken.

Aufgabe 4 **[Gegenbeispiele zu Vitali-Konvergenz]**

Geben Sie Beispiele von Funktionenfolgen $\{u_k\} \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in [1,\infty)$, mit $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1$, $u_k \to 0$ $\mathscr{L}^n$-f.ü., an, so dass mindestens eine der beiden Bedingungen, *gleichmäßig gleichgradige Absolutstetigkeit,* oder *gleichmäßig gleichgradige Integrabilität*, im Konvergenzsatz von Vitali verletzt ist.
