Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung II
Serie 2 vom 30.4.2018
Abgabedatum: 14.5.2018

Aufgabe 5 **[Stetigkeit äußerer Maße]**

Sei X eine Menge, $\mathscr{P}(X)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von X, und $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Beweisen Sie für eine Folge $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ von μ-messbaren Mengen die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Mengen
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \quad \text{und} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$$
sind μ-messbar.

(ii) Falls $E_i \cap E_k = \emptyset$ für alle $i \neq k$, dann gilt
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(iii) Falls $E_j \subset E_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann gilt
$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

(iv) Falls $E_j \supset E_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\mu(E_1) < \infty$, dann gilt
$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

Aufgabe 6 **[Messbare Mengen bilden σ-Algebra]**

Sei X eine Menge mit Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ und $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Zeige, dass die Menge $\mathscr{M}(\mu)$ aller μ-messbaren Teilmengen eine σ-Algebra bildet und $\mu|_{\mathscr{M}(\mu)}$ ein (gewöhnliches) Maß auf X, m.a.W. dass $(X, \mathscr{M}(\mu), \mu)$ ein Maßraum ist.

Aufgabe 7 **[Hausdorff-Maß]**

Sei $(\mathscr{M},d)$ ein metrischer Raum mit Metrik d, $s \geq 0$ und $\delta \in (0,\infty]$. Dann ist die *δ-Approximation des s-dimensionalen Hausdorff-Maßes $\mathscr{H}^s_\delta(E)$* einer Menge $E \subset \mathscr{M}$ erklärt durch

$$\mathscr{H}^s_\delta(E) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_i)^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\, 0 < \operatorname{diam} C_i \leq \delta\},$$

wobei man $\mathscr{H}^s_\delta(\emptyset) := 0$ setzt für alle $s \geq 0$ und $\delta \in (0,\infty]$. Das *s-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathscr{H}^s(E)$* ist dann gegeben durch

$$\mathscr{H}^s(E) := \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^s_\delta(E).$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathscr{H}^s_\delta$ ist ein äußeres Maß auf $\mathscr{M}$ für alle $\delta > 0$ und $s \geq 0$.

(ii) $\mathscr{H}^s$ ist ein äußeres Maß auf $\mathscr{M}$ für alle $s \geq 0$.

(iii) $\mathscr{H}^s$ ist ein metrisches Maß, d.h.,

$$\mathscr{H}^s(E \cup F) = \mathscr{H}^s(E) + \mathscr{H}^s(F) \quad \text{für alle } E,F \subset \mathscr{M} \text{ mit } d(E,F) > 0.$$

(iv)* $\mathscr{H}^s$ ist Borel regulär aber i. A. kein Radon-Maß.

Hinweis: Für den Beweis von Teil (iv) dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass Teil (iii) impliziert, dass $\mathscr{H}^s$ ein Borel-Maß ist.*

Aufgabe 8 **[Monotone Funktionen]**

Sei $\mathscr{F}$ eine unendliche Familie monoton wachsender auf einem beschränkten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definierter Funktionen, und es gebe eine Konstante $K \geq 0$, so dass $|f(x)| \leq K$ für alle $f \in \mathscr{F}$ und alle $x \in [a,b]$. Beweisen Sie die Existenz einer unendlichen Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Funktionen $f_i \in \mathscr{F}$, so dass f_i punktweise überall gegen eine monoton wachsende Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Auf den rationalen Punkten aus $[a,b]$ kann man durch ein Diagonalfolgenargument die punktweise Konvergenz einer Folge gegen eine zunächst nur dort definierte Grenzfunktion erzwingen. Durch geeignete Fortsetzung erhält man eine monotone, auf ganz $[a,b]$ definierte Grenzfunktion, die dann bekanntlich nur abzählbar viele Unstetigkeitstellen besitzen kann. In allen Stetigkeitspunkten dieser Grenzfunktion kann man nun immerhin schon die punktweise Konvergenz nachweisen.
