

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung II Serie 3 vom 14.5.2018 Abgabedatum: 28.5.2018

Aufgabe 9 [Fixpunkte von Richtungskontraktionen]

Zeigen Sie:

- (i) Jede Richtungskontraktion in einem vollständigen metrischen Raum hat mindestens einen Fixpunkt.
- (ii) Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die Metrik $d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und bestimme die *offenen Segmente* (x, y) zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie anschließend, dass die Abbildung

$$f(x) := \left(\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2, x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)$$

zwar keine Kontraktionsabbildung aber doch eine Richtungskontraktion ist. Warum zeigt dieses Beispiel, dass der Fixpunktsatz in Teil (i) keinen eindeutigen Fixpunkt liefert?

Aufgabe 10 [SOBOLEV-POINCARÉ Ungleichung]

Zeigen Sie:

Für alle $p \in [1, n)$ existiert eine Konstante $C = C(p, n)$, so dass

$$\left(\int_{B_r(x)} |u(y) - \bar{u}_{B_r(x)}|^{p^*} dy\right)^{1/p^*} \leq C r \left(\int_{B_r(x)} |Du(y)|^p dy\right)^{1/p} \quad \forall B_r(x) \subset \mathbb{R}^n, u \in W^{1,p}(B_r(x)),$$

wobei für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f}_E := \int_E f(y) dy := \frac{1}{\mathcal{L}^n(E)} \int_E f(y) dy$$

gesetzt wurde. Zeigen Sie im Anschluss, dass eine solche Ungleichung auch für Kreisringgebiete $B_r(x) \setminus B_{\tau r}(x)$ gilt, wobei der Faktor $\tau \in (0, 1)$ dann in die Konstante C auf der rechten Seite eingeht.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für eine allgemeine Funktion $v \in W^{1,p}(B_r(x))$ die Ungleichung

$$\left(\int_{B_r(x)} |v|^{p^*} dy\right)^{1/p^*} \leq C \left[r^p \int_{B_r(x)} |Dv(y)|^p dy + \int_{B_r(x)} |v(y)|^p dy \right]^{1/p}$$

mit Hilfe der SOBOLEV-Ungleichung, die Sie auf die auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzte Funktion $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Fortsetzungssatz, Satz 2.13 aus VarI) anwenden können, und wenden Sie anschließend die Ihnen bekannte POINCARÉ-Ungleichung (Korollar 2.11 (iii) aus VarI) auf $v(y) := u(y) - \bar{u}_{B_r(x)}$ an.

Aufgabe 11 [Iterationslemma]

Zeigen Sie:

Sei $f; [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative beschränkte Funktion, $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, so dass für Konstanten $A, B, \alpha \geq 0$ und $\theta \in [0, 1)$ die Beziehung

$$f(t) \leq \theta f(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B \quad \text{für alle } r_1 \leq t < s \leq r_2 \quad (1)$$

gilt. Dann existiert eine von θ und α abhängige Konstante $c \geq 0$, so dass

$$f(\rho) \leq c \left[\frac{A}{(R-\rho)^\alpha} + B \right] \quad \text{für alle } r_1 \leq \rho < R \leq r_2.$$

Hinweis: Betrachten Sie für einen geeigneten Parameter $\tau \in (0, 1)$ die Folge von Parametern $t_0 := \rho$ und $t_{k+1} - t_k := (1 - \tau)\tau^k(R - \rho)$ und benutzen Sie (1) iterativ.

Aufgabe 12 [Höhere Integrabilität von Minimierern]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine CARATHÉODORY-Funktion, d.h., $x \mapsto F(x, z, P)$ ist messbar für alle $(z, P) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n}$, und für $\mathcal{L}^n$ -fast alle $x \in \Omega$ ist $(z, P) \mapsto F(x, z, P)$ stetig. Weiterhin erfülle F die polynomiale Wachstumsbedingung

$$c_0|P|^s - c_3 \leq F(x, z, P) \leq c_1|P|^s + c_2 \quad \forall (x, z, P) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n}, \quad (\text{KW})$$

für ein $s \in (1, \infty)$, wobei $c_0, c_1 > 0$ und $c_2, c_3 \geq 0$ Konstanten sind. Die Funktion $u \in W^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erfülle $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$ für alle $v \in W^{1,s}$ mit $v - u \in W_0^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, wobei

$$\mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} F(x, v(x), Dv(x)) dx.$$

Zeigen Sie, dass es ein $q > s$ gibt, so dass $u \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit der Abschätzung

$$\left(\int_{B_R(x_0)} (1 + |Du|)^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{B_{2R}(x_0)} (1 + |Du|)^s dx \right)^{1/s} \quad \text{für alle } x_0, R \in (0, \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)),$$

wobei C nicht von u abhängt.

Hinweis: Nutzen Sie für $R \leq t < \sigma \leq 2R$ die Minimalität von u zusammen mit der Wachstumsbedingung (KW) durch Vergleich mit der Funktion $v := u + \eta(u - \bar{u})$, wobei $\eta \in C_0^\infty(B_\sigma(x_0))$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $|D\eta| \leq C/(\sigma - t)$ und $\eta|_{B_t(x_0)} \equiv 1$, und $\bar{u}$ der Integralmittelwert von u auf $B_{2R}(x_0)$ ist. Beachten Sie, dass Sie rechts in der Abschätzung auftretende Integrale $C \int_{B_\sigma(x_0) \setminus B_t(x_0)} |Du|^s dx$ durch Addition von $C \int_{B_t(x_0)} |Du|^s dx$ "füllen" können, so dass Sie auf die resultierende Ungleichung das Iterationslemma aus Aufgabe 11 anwenden können, noch bevor Sie dann die SOBOLEV-POINCARÉ-Ungleichung (vgl. Aufgabe 10) anwenden, um danach den Satz über die höhere Integrabilität, Satz 2.8 aus der Vorlesung zu zitieren.