

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung II
Serie 5 vom 13.6.2018
Abgabedatum: 27.6.2018

Sei \mathcal{M} ein metrischer Raum mit Metrik d , und $-\infty < a < b < \infty$. Dann heißt eine Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ *absolutstetig* (und man schreibt $u \in AC([a, b], \mathcal{M})$) wenn folgendes gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für jede Familie von disjunkten offenen Intervallen $((a_i, b_i))_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_i \leq b_i < a_{i+1} \leq b_{i+1} \leq b$ für alle $i = 1, \dots, n-1$, mit

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \delta$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^n d(u(b_i), u(a_i)) \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 17 [Gronwall's Ungleichungen]

Sei $T > 0$.

- (i) Die Funktion $\eta \in AC([0, T], [0, \infty))$ erfülle die Differentialungleichung

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } t \in (0, T),$$

wobei $\phi, \psi \in L^1((0, T), [0, \infty))$. Zeigen Sie, dass dann

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Folgern Sie, dass die speziellere Differentialungleichung $\eta' \leq \phi\eta$ fast überall auf $(0, T)$ mit $\eta(0) = 0$ impliziert, dass $\eta \equiv 0$ auf $[0, T]$ ist.

- (ii) Die Funktion $\xi \in L^1((0, T), [0, \infty))$ erfülle die Integralungleichung

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2 \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } t \in (0, T),$$

wobei $C_1, C_2 \geq 0$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } t \in (0, T)$$

gilt. Folgern Sie, dass die speziellere Integralungleichung $\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$ für \mathcal{L}^1 -fast alle $t \in (0, T)$ impliziert, dass $\xi(t) = 0$ für \mathcal{L}^1 -fast alle $t \in (0, T)$ ist.

Aufgabe 18 [Nicht-differenzierbare absolutstetige Funktion]

Sei $T > 0$ und

$$u(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq t, \\ 0 & \text{für } t < x \leq 1. \end{cases}$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $x \mapsto u(x,t)$ von der Klasse $L^1((0,1))$ für jedes $t \in [0, T]$ ist, und berechnen Sie die L^1 -Norm $\|u(\cdot, t)\|_{L^1((0,1))}$ für jedes $t \in [0, T]$.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $U : [0, T] \rightarrow L^1((0,1))$ definiert durch $U(t)(x) := u(x,t)$ absolutstetig ist, also in der Klasse $AC([0, T], L^1((0,1)))$ liegt.
- (iii) Zeigen Sie, dass die Funktion U aus Teil (ii) nirgends klassisch differenzierbar ist, d.h. an keiner Stelle $t \in (0, T)$ eine Fréchet-Ableitung $U'(t) \in L^1((0,1))$ besitzt.

Bemerkung: Teil (iii) steht nicht im Widerspruch zur Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für absolutstetige BANACHraum-wertige Funktionen, der u.a. die Differenzierbarkeit \mathcal{L}^1 -fast überall sichert, aber eben nur unter der Voraussetzung, dass der Zielraum reflexiv ist. Der Raum $L^1((0,1))$ hingegen ist nicht reflexiv.

Aufgabe 19 [Negative (PDE)-Lösung]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und die Funktion $p : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

(p1)* $p \in C_{\text{loc}}^{0,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$,

(p2) Es gibt Konstanten $a_1, a_2 \geq 0$ und $s \in [0, \frac{n+2}{n-2})$, so dass

$$p(x, \xi) \leq a_1 + a_2 |\xi|^s \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R},$$

(p3) $p(x, \xi) = o(|\xi|)$ für $\xi \rightarrow 0$.

(p4) Es gibt Konstanten $\mu > 2$, $r \geq 0$, so dass

$$0 < \mu p(x, \xi) \leq \xi \cdot p(x, \xi) \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}, |\xi| \geq r.$$

Zeigen Sie die Existenz einer nichttrivialen, in Ω strikt negativen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des nichtlinearen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = p(\cdot, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{PDE})$$

Hinweis: Die Regularitätstheorie für die Poissongleichung und zugehörige Maximumprinzipien für uniform elliptische partielle Differentialgleichungen dürfen Sie wie in der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 20 [Pohozaev-Identität]

Sei $n \geq 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$ und die Funktion $p = p(\xi)$ erfülle die Bedingungen (p1)–(p4) aus Satz 3.8 der Vorlesung – allerdings ohne x -Abhängigkeit.

- (i) Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = p(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PDE}_2)$$

die Integralidentität

$$\int_{\Omega} (|Du|^2 - p(u)u) dx = 0$$

erfüllt.

- (ii) Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ von (PDE₂) die *Pohozaev-Identität*

$$(n-2) \int_{\Omega} p(u)u dx - 2n \int_{\Omega} P(u) dx = \int_{\partial\Omega} |Du|^2 \langle x, \nu \rangle ds - 2 \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \langle x, Du \rangle ds, \quad (\text{P})$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n und $\partial_{\nu} u = \langle \nu, Du \rangle$ die Normalableitung von u auf $\partial\Omega$ (mit der äußeren Einheitsnormalen ν an $\partial\Omega$) ist.

Hinweis: Multiplizieren Sie (PDE₂) mit $\langle x, Du(x) \rangle$ und nutzen Sie nach Integration über Ω partielle Integrationen und die in Teil (i) gefundene Integralidentität.

- (iii) Spezialisieren Sie die Pohozaev-Identität (P) auf den Fall $\Omega := B_R(0)$, $R > 0$ und leiten Sie damit die strikte Ungleichung

$$\int_{B_R(0)} p(u)u dx < \frac{2n}{n-2} \int_{B_R(0)} P(u) dx.$$

- (iv) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Teil (iii), dass die Forderung $s < \frac{n+2}{n-2}$ in der Wachstumsbedingung (p2) (siehe Vorlesung) für die Existenz einer in Ω strikt positiven klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ optimal ist.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $p(t) := |t|^s$ und leiten Sie einen Widerspruch für $s \geq \frac{n+2}{n-2}$ her, indem Sie auch nutzen, dass $Du = \langle Du, \nu \rangle \nu$ auf $\partial\Omega$ (warum?).

- (v) Gilt die Aussage aus Teil (iv) auch, wenn Ω nur *strikt sternförmig* (bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$) ist, d.h. wenn $\langle x, \nu(x) \rangle > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$?