Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Daniel Steenebrügge

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung II
Serie 2 vom 19.4.2022
Abgabedatum: 4.5.2022

Aufgabe 5 **[Stetigkeit äußerer Maße]**

Sei X eine Menge, $\mathscr{P}(X)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von X, und $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Beweisen Sie für eine Folge $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ von μ-messbaren Mengen die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Mengen
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \quad \text{und} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$$
sind μ-messbar.

(ii) Falls $E_i \cap E_k = \emptyset$ für alle $i \neq k$, dann gilt
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(iii) Falls $E_j \subset E_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann gilt
$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

(iv) Falls $E_j \supset E_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\mu(E_1) < \infty$, dann gilt
$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie (i) erst zunächst für endliche Vereinigungen und Schnitte und nutzen Sie das für die Teile (ii)–(iv), bevor Sie (i) dann allgemein zeigen. Außerdem müssen Sie sich noch klarmachen, dass μ-messbare Mengen auch $\mu \llcorner A$-messbar sind, wobei $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge ist.

Aufgabe 6 **[Messbare Mengen bilden σ-Algebra]**

Sei X eine Menge mit Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ und $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Zeige, dass die Menge $\mathscr{M}(\mu)$ aller μ-messbaren Teilmengen eine σ-Algebra bildet und $\mu|_{\mathscr{M}(\mu)}$ ein (gewöhnliches) Maß auf X, mit anderen Worten, dass $(X, \mathscr{M}(\mu), \mu)$ ein Maßraum ist.

Aufgabe 7 **[Hausdorff-Maß]**

Sei $(\mathscr{M},d)$ ein metrischer Raum mit Metrik d, $s \geq 0$ und $\delta \in (0,\infty]$. Dann ist die *δ-Approximation des s-dimensionalen Hausdorff-Maßes* $\mathscr{H}^s_\delta(E)$ einer Menge $E \subset \mathscr{M}$ erklärt durch

$$\mathscr{H}^s_\delta(E) := \inf\{\sum_{i\in I}(\operatorname{diam} C_i)^s : I \subset \mathbb{N}, E \subset \bigcup_{i\in I} C_i, \operatorname{diam} C_i \leq \delta \text{ für alle } i \in I\},$$

wobei man $\mathscr{H}^s_\delta(\emptyset) := 0$ setzt für alle $s \geq 0$ und $\delta \in (0,\infty]$. Das *s-dimensionale Hausdorff-Maß* $\mathscr{H}^s(E)$ ist dann gegeben durch

$$\mathscr{H}^s(E) := \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^s_\delta(E).$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathscr{H}^s_\delta$ ist ein äußeres Maß auf $\mathscr{M}$ für alle $\delta > 0$ und $s \geq 0$.

(ii) $\mathscr{H}^s$ ist ein äußeres Maß auf $\mathscr{M}$ für alle $s \geq 0$.

(iii) $\mathscr{H}^s$ ist ein metrisches Maß, d.h.,

$$\mathscr{H}^s(E \cup F) = \mathscr{H}^s(E) + \mathscr{H}^s(F) \quad \text{für alle } E,F \subset \mathscr{M} \text{ mit } d(E,F) > 0,$$

wobei $d(E,F) := \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\}$.

(iv)* $\mathscr{H}^s$ ist Borel regulär aber i. A. kein Radon-Maß.

Hinweis: Für den Beweis von Teil (iv) dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass Teil (iii) impliziert, dass* $\mathscr{H}^s$ *ein Borel-Maß ist.*

Aufgabe 8 **[Monotone Funktionen]**

Sei $\mathscr{F}$ eine unendliche Familie monoton wachsender auf einem beschränkten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definierter Funktionen, und es gebe eine Konstante $K \geq 0$, so dass $|f(x)| \leq K$ für alle $f \in \mathscr{F}$ und alle $x \in [a,b]$. Beweisen Sie die Existenz einer unendlichen Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Funktionen $f_i \in \mathscr{F}$, so dass f_i punktweise überall gegen eine monoton wachsende Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Auf den rationalen Punkten aus $[a,b]$ *kann man durch ein Diagonalfolgenargument die punktweise Konvergenz einer Folge gegen eine zunächst nur dort definierte Grenzfunktion erzwingen. Durch geeignete Fortsetzung erhält man eine monotone, auf ganz* $[a,b]$ *definierte Grenzfunktion, die dann bekanntlich nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen kann. In allen Stetigkeitspunkten dieser Grenzfunktion kann man nun immerhin schon die punktweise Konvergenz nachweisen.*
