Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Daniel Steenebrügge

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung II Serie 3 vom 29.4.2022 Abgabedatum: 18.5.2022

Aufgabe 9 **[Fixpunkte von Richtungskontraktionen]**

Zeigen Sie:

(i) Jede Richtungskontraktion in einem vollständigen metrischen Raum hat mindestens einen Fixpunkt.

(ii) Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die Metrik $d(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und bestimme die *offenen Segmente* (x,y) zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie anschließend, dass die Abbildung

$$f(x) := (\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2, x_1 + \frac{1}{3}x_2)$$

zwar keine Kontraktionsabbildung aber doch eine Richtungskontraktion ist. Warum zeigt dieses Beispiel, dass der Fixpunktsatz in Teil (i) keinen eindeutigen Fixpunkt liefert?

Aufgabe 10 [Sobolev-Poincaré **Ungleichung]**

Zeigen Sie:

Für alle $p \in [1,n)$ existiert eine Konstante $C = C(p,n)$, so dass

$$\left(\fint_{B_r(x)} |u(y) - \bar{u}_{B_r(x)}|^{p^*} \, dy \right)^{1/p^*} \leq Cr \left(\fint_{B_r(x)} |Du(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \forall B_r(x) \subset \mathbb{R}^n, \, u \in W^{1,p}(B_r(x)),$$

wobei für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$

$$\bar{f}_E := \fint_E f(y) \, dy := \frac{1}{\mathscr{L}^n(E)} \int_E f(y) \, dy$$

gesetzt wurde. Zeigen Sie im Anschluss, dass eine solche Ungleichung auch für Kreisringgebiete $B_r(x) \setminus B_{\tau r}(x)$ gilt, wobei der Faktor $\tau \in (0,1)$ dann implizit in die Konstante C auf der rechten Seite eingeht.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für eine allgemeine Funktion $v \in W^{1,p}(B_r(x))$ die Ungleichung

$$\left(\fint_{B_r(x)} |v|^{p^*} \, dy \right)^{1/p^*} \leq C \left[r^p \fint_{B_r(x)} |Dv(y)|^p \, dy + \fint_{B_r(x)} |v(y)|^p \, dy \right]^{1/p}$$

mit Hilfe der Sobolev-*Ungleichung, die Sie auf die auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzte Funktion $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Forsetzungssatz, Satz 2.13 aus VarI) anwenden können, und wenden Sie anschließend die Ihnen bekannte* Poincaré-*Ungleichung (Korollar 2.11 (iii) aus VarI) auf $v(y) := u(y) - \bar{u}_{B_r(x)}$ an.*

Aufgabe 11 **[Iterationslemma]**

Zeigen Sie:

Sei $f\colon [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative beschränkte Funktion, $0 \le r_1 < r_2 < \infty$, so dass für Konstanten $A, B, \alpha \ge 0$ und $\theta \in [0,1)$ die Beziehung

$$f(t) \le \theta f(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B \qquad \text{für alle } \ r_1 \le t < s \le r_2 \tag{1}$$

gilt. Dann existiert eine von θ und α abhängige Konstante $c \ge 0$, so dass

$$f(\rho) \le c\left[\frac{A}{(R-\rho)^\alpha} + B\right] \qquad \text{für alle } \ r_1 \le \rho < R \le r_2.$$

Hinweis: Betrachten Sie für einen geeigneten Parameter $\tau \in (0,1)$ die Folge von Parametern $t_0 := \rho$ und $t_{k+1} - t_k := (1-\tau)\tau^k(R-\rho)$ und benutzen Sie (1) iterativ.

Aufgabe 12 **[Höhere Integrabilität von Minimierern]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ eine CARATHÉODORY-Funktion, d.h., $x \mapsto F(x,z,P)$ ist messbar für alle $(z,P) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n}$, und für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ ist $(z,P) \mapsto F(x,z,P)$ stetig. Weiterhin erfülle F die polynomiale Wachstumsbedingung

$$c_0|P|^s - c_3 \le F(x,z,P) \le c_1|P|^s + c_2 \quad \forall (x,z,P) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times R^{N\times n}, \tag{KW}$$

für ein $s \in (1,\infty)$, wobei $c_0, c_1 > 0$ und $c_2, c_3 \ge 0$ Konstanten sind. Die Funktion $u \in W^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erfülle $\mathscr{F}(u) \le \mathscr{F}(v)$ für alle $v \in W^{1,s}$ mit $v - u \in W_0^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, wobei

$$\mathscr{F}(v) := \int_\Omega F(x, v(x), Dv(x))\, dx.$$

Zeigen Sie, dass es ein $q > s$ gibt, so dass $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit der Abschätzung

$$\Bigg(\fint_{B_R(x_0)} (1+|Du|)^q\, dx\Bigg)^{1/q} \le C\Bigg(\fint_{B_{2R}(x_0)} (1+|Du|)^s\, dx\Bigg)^{1/s} \ \text{für alle } \ x_0, R \in (0, \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)),$$

wobei C nicht von u abhängt.

Hinweis: Nutzen Sie für $R \le t < \sigma \le 2R$ die Minimalität von u zusammen mit der Wachstumsbedingung (KW) *durch Vergleich mit der Funktion $v := u + \eta(u - \bar{u})$, wobei $\eta \in C_0^\infty(B_\sigma(x_0))$ mit $0 \le \eta \le 1$, $|D\eta| \le C/(\sigma - t)$ und $\eta|_{B_t(x_0)} \equiv 1$, und $\bar{u}$ der Integralmittelwert von u auf $B_{2R}(x_0)$ ist. Beachten Sie, dass Sie rechts in der Abschätzung auftretende Integrale $C\int_{B_\sigma(x_0)\setminus B_t(x_0)} |Du|^s\, dx$ durch Addition von $C\int_{B_t(x_0)} |Du|^s\, dx$ "füllen" können, so dass Sie auf die resultierende Ungleichung das Iterationslemma aus Aufgabe 11 anwenden können, noch bevor Sie dann die* SOBOLEV-POINCARÉ*-Ungleichung (vgl. Aufgabe 10) anwenden, um danach den Satz über die höhere Integrabilität, Satz 2.8 aus der Vorlesung zu zitieren.*
