Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Daniel Steenebrügge

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung II
Serie 4 vom 13.5.2022
Abgabedatum: 8.6.2022

Aufgabe 13 **[Parakompaktheit]**

Sei $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung eines metrischen Raumes $\mathscr{M}$ mit Metrik d. Konstruieren Sie eine lokal finite Verfeinerung dieser Überdeckung.

Hinweis: Definieren Sie induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine geeignete Vereinigung D_{in} von offenen Bällen $B_{2^{-n}}(x)$, so dass i der kleinste Index ist mit $x \in C_i$, außerdem $x \notin D_{kj}$ für beliebiges k falls $j < n$, und schließlich so dass $B_{3\cdot 2^{-n}}(x) \subset C_i$ ist.

Aufgabe 14 **[Palais-Smale-Variante]**

Sei $\mathscr{B}$ ein Banachraum und $c \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $\mathscr{F} \in C^1(\mathscr{B})$ erfüllt die *(PS)$_c$-Bedingung*, falls die Existenz einer Folge $(u_k)_k \subset \mathscr{B}$ mit $\mathscr{F}(u_k) \to c$ und $D\mathscr{F}(u_k) \to 0$ für $k \to \infty$ impliziert, dass c ein kritischer Wert von $\mathscr{F}$ ist, d.h., dass die Menge $\mathscr{K}_c := \{w \in \mathscr{B} : \mathscr{F}(w) = c, D\mathscr{F}(w) = 0\}$ nichtleer ist.

Zeigen Sie:

(i) Die Palais-Smale-Bedingung aus der Vorlesung impliziert die (PS)$_c$-Bedingung für alle $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Für $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion $\mathscr{F}(t) := \exp t$, $t \in \mathbb{R}$, die Bedingung (PS)$_c$ für alle $c \neq 0$, aber nicht die Bedingung (PS)$_0$.

(iii) Für $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion $\mathscr{F}(t) := \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, zwar die (PS)$_c$-Bedingung für alle $c \in \mathbb{R}$, nicht aber die Palais-Smale Bedingung aus der Vorlesung.

(iv) Für $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion $\mathscr{F}(t) := t$ die (PS)$_c$-Bedingung für alle $c \in \mathbb{R}$.

(v) Für $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion $\mathscr{F}(t) := t^2/2$, $t \in \mathbb{R}$, die (PS)$_c$-Bedingung für alle $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15 **[(α,β)-Pseudogradientenvektorfeld]**

Sei $\mathscr{B}$ ein Banachraum, $\mathscr{F} \in C^1(\mathscr{B})$ und $0 < \beta < \alpha$. Dann heißt $v \in \mathscr{B}$ ein (α,β)-*Pseudogradientenvektor für $\mathscr{F}$ an der Stelle $u \in \mathscr{B}$,* wenn

(i) $\|v\|_{\mathscr{B}} \le \alpha \|D\mathscr{F}(u)\|_{\mathscr{B}^*}$,

(ii) $D\mathscr{F}(u)v \ge \beta \|D\mathscr{F}(u)\|^2_{\mathscr{B}^*}$.

Ein (α,β)-*Pseudogradientenvektorfeld für $\mathscr{F}$* auf $\tilde{\mathscr{B}} := \{w \in \mathscr{B} : D\mathscr{F}(w) \neq 0\}$ ist eine lokal LIPSCHITZ-stetige Abbildung $V : \tilde{\mathscr{B}} \to \mathscr{B}$, so dass $V(x)$ ein (α,β)-Pseudogradientenvektor für $\mathscr{F}$ an allen Stellen $x \in \tilde{\mathscr{B}}$ ist.

Zeigen Sie: Es exisitert ein solches (α,β)-Pseudogradientenvektorfeld für $\mathscr{F}$.

Aufgabe 16 **[Stetigkeit auf LEBESGUE-Räumen]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt und die Funktion $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

(g1) $g \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$,

(g2) Es gibt Konstanten $r, \rho \ge 1$, $a_1, a_2 \ge 0$, so dass

$$|g(x,\xi)| \le a_1 + a_2 |\xi|^{r/\rho} \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\varphi \mapsto g(\cdot,\varphi(\cdot))$ in der Klasse $C^0(L^r(\Omega), L^\rho(\Omega))$ ist.

Hinweis: Zeigen¸ Sie zunächst, dass es reicht, für eine beliebige Funktion $\varphi_0 \in L^r(\Omega)$ die Stetigkeit der Zuordnung $z(\cdot) \mapsto f(\cdot,z(\cdot)) := g(\cdot,z(\cdot)+\varphi_0(\cdot)) - g(\cdot,\varphi_0(\cdot))$ an der Stelle $z(\cdot) = 0$ zu zeigen, und nutzen Sie dazu, dass $f(\cdot,0) = 0$ ist. Für $u \in L^r(\Omega)$ mit genügend klein zu wählender L^r-Norm, kann man dann die Stetigkeit von f nutzen, um den Integrationsbereich von $|f(\cdot,u(\cdot))|^\rho$ so aufzuspalten, dass auf einem Teilgebiet u punktweise so klein ist, dass auch $|f(\cdot,u(\cdot))|^\rho$ punktweise klein ist. Auf dem zweiten Teilgebiet nutzt man die Wachstumsbedingung für g und die Tatsache, dass dieses Teilgebiet mit verschwindender Norm von u selbst klein werden muss.