Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Daniel Steenebrügge

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung II Serie 5 vom 3.6.2022 Abgabedatum: 29.6.2022

Sei $\mathscr{M}$ ein metrischer Raum mit Metrik d, und $-\infty < a < b < \infty$. Dann heißt eine Funktion $u : [a,b] \to \mathscr{M}$ *absolutstetig* (und man schreibt $u \in AC([a,b],\mathscr{M})$) wenn folgendes gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für jede Familie von disjunkten offenen Intervallen $((a_i,b_i))_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_i \leq b_i < a_{i+1} \leq b_{i+1} \leq b$ für alle $i = 1,\dots,n-1$, mit

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d(u(b_i),u(a_i)) \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 17 **[Gronwall's Ungleichungen]**

Sei $T > 0$.

(i) Die Funktion $\eta \in AC([0,T],[0,\infty))$ erfülle die Differentialungleichung

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } t \in (0,T),$$

wobei $\phi, \psi \in L^1((0,T),[0,\infty))$. Zeigen Sie, dass dann

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right] \text{ für alle } t \in [0,T].$$

Folgern Sie, dass die speziellere Differentialungleichung $\eta' \leq \phi\eta$ fast überall auf $(0,T)$ mit $\eta(0) = 0$ impliziert, dass $\eta \equiv 0$ auf $[0,T]$ ist.

(ii) Die Funktion $\xi \in L^1((0,T),[0,\infty))$ erfülle die Integralungleichung

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2 \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } t \in (0,T),$$

wobei $C_1, C_2 \geq 0$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } t \in (0,T)$$

gilt. Folgern Sie, dass die speziellere Integralungleichung $\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $t \in (0,T)$ impliziert, dass $\xi(t) = 0$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $t \in (0,T)$ ist.

Aufgabe 18 **[Nicht-differenzierbare absolutstetige Funktion]**

Sei für $t \in [0,1]$

$$u(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le t, \\ 0 & \text{für } t < x \le 1. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $x \mapsto u(x,t)$ von der Klasse $L^1((0,1))$ für jedes $t \in [0,1]$ ist, und berechnen Sie die L^1-Norm $\|u(\cdot,t)\|_{L^1((0,1))}$ für jedes $t \in [0,1]$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $U : [0,1] \to L^1((0,1))$ definiert durch $U(t)(x) := u(x,t)$ absolutstetig ist, also in der Klasse $AC\big([0,1], L^1((0,1))\big)$ liegt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion U aus Teil (ii) nirgends klassisch differenzierbar ist, d.h. an keiner Stelle $t \in (0,1)$ eine Fréchet-Ableitung $U'(t) \in L^1((0,1))$ besitzt.

Bemerkung: Teil (iii) steht nicht im Widerspruch zur Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für absolutstetige BANACH*raum-wertige Funktionen, der u.a. die Differenzierbarkeit $\mathscr{L}^1$-fast überall sichert, aber eben nur unter der Voraussetzung, dass der Zielraum reflexiv ist. Der Raum $L^1((0,1))$ hingegen ist nicht reflexiv.*

Aufgabe 19 **[Negative (PDE)-Lösung]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und die Funktion $q : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

(q1)* $q \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$,

(q2) Es gibt Konstanten $a_1, a_2 \ge 0$ und $s \in [0, \frac{n+2}{n-2})$, so dass

$$q(x,\xi) \le a_1 + a_2|\xi|^s \text{ für alle } x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R},$$

(q3) $q(x,\xi) = o(|\xi|)$ für $\xi \to 0$.

(q4) Es gibt Konstanten $\mu > 2$, $r \ge 0$, so dass für $Q(x,\xi) := \int_0^\xi q(x,t)\,dt$ gilt:

$$0 < \mu Q(x,\xi) \le \xi \cdot q(x,\xi) \text{ für alle } x \in \overline{\Omega},\ |\xi| \ge r.$$

Zeigen Sie die Existenz einer nichttrivialen, in Ω strikt negativen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des nichtlinearen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = q(\cdot,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{PDE}$$

Hinweis: Die Regularitätstheorie für die Poissongleichung und zugehörige Maximumprinzipien für uniform elliptische partielle Differentialgleichungen dürfen Sie wie in der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 20 **[Pohozaev-Identität]**

Sei $n \geq 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$ und die Funktion $q = q(\xi)$ erfülle die Bedingungen (q1)–(q4) aus Satz 3.8 der Vorlesung – allerdings ohne x-Abhängigkeit.

(i) Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = q(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PDE$_2$}$$

die Integralidentität

$$\int_\Omega \Big(|Du|^2 - q(u)u \Big)\, dx = 0$$

erfüllt.

(ii) Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von (PDE$_2$) die *Pohozaev-Identität*

$$(n-2)\int_\Omega q(u)u\, dx - 2n\int_\Omega Q(u)\, dx = \int_{\partial\Omega} |Du|^2 \langle x, \nu\rangle\, ds - 2\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \langle x, Du\rangle\, ds, \tag{P}$$

wobei $Q(\xi) := \int_0^\xi q(t)\, dt$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und $\partial_\nu u = \langle \nu, Du\rangle$ die Normalableitung von u auf $\partial\Omega$ (mit der äußeren Einheitsnormalen ν an $\partial\Omega$) ist.

Hinweis: Multiplizieren Sie (PDE$_2$) *mit* $\langle x, Du(x)\rangle$ *und nutzen Sie nach Integration über* Ω *partielle Integrationen und die in Teil (i) gefundene Integralidentität.*

(iii) Spezialisieren Sie die Pohozaev-Identität (P) auf den Fall $\Omega := B_R(0)$, $R > 0$ und leiten Sie damit die strikte Ungleichung

$$\int_{B_R(0)} q(u)u\, dx < \frac{2n}{n-2}\int_{B_R(0)} Q(u)\, dx.$$

(iv) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Teil (iii), dass die Forderung $s < \frac{n+2}{n-2}$ in der Wachstumsbedingung (q2) (siehe Vorlesung) für die Existenz einer in Ω strikt positiven klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ optimal ist.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $q(t) := |t|^s$ *und leiten Sie einen Widerspruch für* $s \geq \frac{n+2}{n-2}$ *her, indem Sie auch nutzen, dass* $Du = \langle Du, \nu\rangle \nu$ *auf* $\partial\Omega$ *(warum?).*

(v) Gilt die Aussage aus Teil (iv) auch, wenn Ω nur *strikt sternförmig* (bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$) ist, d.h. wenn $\langle x, \nu(x)\rangle > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$?
