

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 2 vom 23.10.2007

Aufgabe 5 [Sturm-Liouville-Operator]

Für $u \in C^2(I) \cap C^0(\bar{I})$, $I = (a, b)$, gelte

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist. Weiterhin gebe es Konstanten $0 < c_0 \leq c_1$, so dass

$$c_0 \leq c(x) \leq c_1 \text{ für alle } x \in I. \tag{2}$$

(a) Beweisen Sie:

$$u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, c_0^{-1} \sup_{y \in I} |f(y)|\} \text{ für alle } x \in \bar{I}.$$

(b) Die in (a) zu beweisende Aussage stellt eine *a priori* Abschätzung für die Lösung von (1) dar, d.h. eine Abschätzung von $u(x)$ durch Konstanten, die nur von den Daten α, β, c, f in (1) abhängen. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass eine solche *a priori* Abschätzung für Lösungen von (1) i.A. nicht möglich ist, falls $0 > c_1 \geq c(x) \geq c_0$ für alle $x \in I$ anstelle von (2) gilt.

Aufgabe 6 [Innere Variationen für Variationsprobleme höherer Ordnung]

Sei

$$\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x), u''(x)) dx$$

ein Variationsintegral 2. Ordnung. Wir nehmen an, dass $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ und $\lambda := \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0) \in C^2(\bar{I})$, wobei $\{\xi(\cdot, \varepsilon)\}_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$ eine zulässige Parametervariation im Sinne von Definition 1.14 ist. Berechnen Sie analog zur Vorlesung (Proposition 1.16) die innere Variation $\partial \mathcal{F}(u, \lambda)$.

Aufgabe 7 [Parameterinvariantes Variationsintegral = CARTAN-Funktional]

Sei

$$\mathcal{F}_I(u) := \int_I F(u(x), u'(x)) dx, \quad I = (a, b),$$

mit $F \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ein Variationsintegral definiert auf der Funktionenklasse $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) \mathcal{F} is *parameterinvariant*, d.h. es gilt $\mathcal{F}_I(u) = \mathcal{F}_J(u \circ \sigma)$ für alle $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, und für alle C^1 -Diffeomorphismen $\sigma : \bar{J} \rightarrow \bar{I}$ von $\bar{J} := [c, d]$ auf \bar{I} mit $\frac{d}{d\tau} \sigma(\tau) > 0$ für alle $\tau \in \bar{J}$.
- (ii) $F(z, \cdot)$ ist positiv homogen 1. Ordnung, d.h. es gilt

$$F(z, tp) = tF(z, p) \text{ für alle } t > 0, z, p \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{H})$$

Hinweis: Für den Beweis von "(i) \Rightarrow (ii)" wähle für beliebige $(z, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ eine Kurve $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ (mit $I = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$) mit $u(0) = z$, $u'(0) = p$, und den Diffeomorphismus $\sigma : [-\varepsilon_0/t, \varepsilon_0/t] \rightarrow \bar{I}$ definiert durch $\sigma(\tau) := t \cdot \tau$, für $\tau \in [-\varepsilon_0/t, \varepsilon_0/t]$ und für beliebiges (aber festes) $t > 0$.

Aufgabe 8 [Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]

Beweisen Sie (in Verallgemeinerung von Prop. 1.19) die *Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen*:

VOR.: Seien $F, G_1, G_2, \dots, G_m \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, und $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\mathcal{F}(u) = \min_{C_\delta} \mathcal{F}(\cdot),$$

wobei

$$C_\delta := \{v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta, \\ \|v - u\|_{C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)} < \delta, \mathcal{G}_i(v) = c_i, i = 1, \dots, m\},$$

mit gegebenen Konstanten $\delta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^N, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, und wobei

$$\mathcal{G}_i(v) := \int_I G_i(x, v(x), v'(x)) dx, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weiterhin gebe es $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_m \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, so dass die $(m \times m)$ -Matrix $(\delta \mathcal{G}_i(u, \bar{\psi}_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta \mathcal{F}(u, \phi) + \lambda_1 \delta \mathcal{G}_1(u, \phi) + \dots + \lambda_m \delta \mathcal{G}_m(u, \phi) = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$