Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Michael Dahmen, Tobias Hermes, Matthias Schlottbom

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 3 vom 30.10.2007

Aufgabe 9 **[Euler-Lagrange-Gleichung höherer Ordnung]**

Sei $u \in C^{2m}(I,\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$ eine schwache Extremale von

$$\mathscr{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x), \ldots, v^{(m)}(x))\, dx,$$

wobei $F = F(x,z,p_1,\ldots,p_m) \in C^{m+1}(I \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N)$.

Beweisen Sie: Für alle $x \in I$ gilt

$$F_z(x,u(x),u'(x),\ldots,u^{(m)}(x)) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left[F_{p_i}(x,u(x),u'(x),\ldots,u^{(m)}(x))\right] = 0.$$

Aufgabe 10 **[Natürliche Randbedingungen in zwei Dimensionen]**

Betrachte Variationsintegrale der Form

$$\mathscr{F}(u) := \int_{B^+} F(x,u(x),Du(x))\, dx, \tag{1}$$

wobei $B^+ := \{x = (x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x^2 > 0\}$. Sei $u \in C^2(\overline{B^+},\mathbb{R}^N)$, $F \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N})$, $I = (-1,1) \times \{0\}$, und $Du(x)$ bezeichne die Jakobische von u.

(a) Beweisen Sie: Falls $\delta\mathscr{F}(u,\phi) = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(B^+ \cup I,\mathbb{R}^N)$, dann gelten die *natürlichen Randbedingungen*

$$F_{p_2^i}(x,u(x),Du(x)) = 0 \text{ für alle } x \in I,\ i = 1,\ldots,N.$$

Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Proposition 1.12 vor und nutzen Sie Aufgabe 1 von Serie 1.

(b) Geben Sie für die Funktionale

$$\mathscr{D}(u) := \frac{1}{2}\int_{B^+} |Du(x)|^2\, dx \quad \textit{(Dirichlet Integral)}, \tag{2}$$

$$\mathscr{A}(u) := \int_{B^+} \{\sqrt{1+|Du(x)|^2} + g(x,u)\}\, dx \tag{3}$$

(Flächenfunktional mit äußerem Potential)

die natürlichen Randbedingungen konkret an, wobei $g \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N)$ ist.

Aufgabe 11 Beweisen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}(v) := \int_I v(x)\sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx, \quad \mathscr{L}(v) := \int_I \sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx$$

gilt die Aussage:

u ist schwache Extremale von $\mathscr{F}+\lambda\mathscr{L}$ genau dann, wenn $u+\lambda$ eine schwache Extremale von $\mathscr{F}$ ist.

Aufgabe 12 **[Flächenfunktional für zweidimensionale Graphen]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ sei schwache $\mathscr{F}$-Extremale für das Flächenfunktional

$$\mathscr{F}(v) := \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla v(x)|^2}\,dx.$$

Zeigen Sie:

$$\mathscr{F}(u) \leq \mathscr{F}(v) \quad \text{für alle } v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \text{ mit } v = u \text{ in einer Umgebung von } \partial\Omega.$$

Hinweis: Machen Sie sich zunächst mit Hilfe von Faltungen (vgl. z.B. Satz 5 (iii) aus der Übung) klar, dass $\delta\mathscr{F}(u, u-v) = 0$. (Das kann man übrigens auch zeigen, wenn nur $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ und $u = v$ auf $\partial\Omega$, was wir im dritten Kapitel der Vorlesung sehen werden.)
