Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 4 vom 6.11.2007

Aufgabe 13 [Fundamentallemma DUBOIS-REYMOND II]

Beweisen Sie die folgende Variante des Fundamentallemmas:

Sei $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^0(\bar{I})$ erfülle

$$\int_I f(x)\eta(x) dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C^0(\bar{I}) \text{ mit } \int_I \eta(x) dx = 0,$$

dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in \bar{I}$.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an. Konstruieren Sie zu zwei Punkten mit unterschiedlichen f -Werten eine stetige Funktion η mit Träger in hinreichend kleinen, disjunkten, aber gleichgroßen Umgebungen dieser beiden Punkte, so dass die Werte jeweils entgegengesetztes Vorzeichen auf diesen Umgebungen haben.

Aufgabe 14 [Nichtlösbares Variationsproblem I]

(i) Zeigen Sie, dass das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(v) := \int_0^1 (v^2(x) - 1)^2 dx$$

in der Klasse

$$C := \{v \in C^1([0, 1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$

keinen Minimierer besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ in

$$D := \{v \in C^{0,1}([0, 1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$

unendlich viele Minimierer besitzt.

(iii)* Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{G}(v) := \int_0^1 (1 + v^2(x))[1 + (v^2(x) - 1)^2] dx$$

in der Klasse D keine Lösung besitzt.

Aufgabe 15 [Nichtlösbares Variationsproblem II] Sei $h(x) := 1 - |x|$ für $x \in [-2, 2]$ eine Funktion, die das folgende Hindernisproblem determiniert: Gesucht ist ein Minimierer des Längenfunktional

$$\mathcal{L}(v) := \int_{-2}^2 \sqrt{1 + v'^2(x)} dx$$

in der Klasse

$$C_h := \{v \in C^1([-2, 2]) : v(-2) = 0 = v(2), v(x) \geq h(x) \forall x \in [-2, 2]\}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Problem keine Lösung besitzt.

Hinweis: Der Polygonzug, der die vorgegebenen Randpunkte über die Spitze des Hindernisses verbindet, liefert offensichtlich die kürzeste Verbindung der Randpunkte unter Berücksichtigung der Hindernisbedingung. Vergleichen Sie dessen Länge mit der eines beliebigen Minimierers $u \in C_h$; setzen Sie dazu an einer Maximalstelle von u an.

Aufgabe 16 [Schwingende Saite]

Leiten Sie für die Lösung $u \in C^2([a, b])$ des Variationsproblems der schwingenden Saite

$$\mathcal{F}(v) := \int_a^b |v''(x)| dx \rightarrow \min!$$

in der Klasse

$$C := \{v \in C^1([a, b]) : v(a) = 0 = v(b), \int_a^b v^2(x) dx = 1\}$$

die EULER-LAGRANGE-Gleichungen her und bestimmen Sie den als Eigenwert auftretenden Lagrange-Parameter explizit in Abhängigkeit von der Lösung u .