Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Michael Dahmen, Tobias Hermes, Matthias Schlottbom

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 5 vom 13.11.2007

Aufgabe 17 **[Der elastische Balken]**

Es gelte für die Funktion $u \in C^4([-1,1])$ die Identität

$$\mathscr{E}(u) = \inf_C \mathscr{E},$$

wobei für Konstanten $M, g > 0$

$$\mathscr{E}(v) := \int_{-1}^{1} \left[M|v''(x)|^2 + gv(x) \right] dx$$

und

$$C := \{v \in C^2([-1,1]) : v(-1) = v(1) = v'(-1) = v'(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x) = -\frac{g}{48M}(x^2-1)^2.$$

Hinweis: Gehen Sie vor wie in dem Beispiel des elastischen Fadens, Beispiel $\boxed{13}$ der Vorlesung. Das Funktional $\mathscr{E}$ modelliert in einer ersten, sehr groben Näherung die Gesamtenergie eines beidseitig eingespannten elastischen Balkens in einem homogenen Gravitationsfeld. M ist hier eine Materialkonstante und g die Gravitationskonstante.

Aufgabe 18 **[Die hängende Kette]**

Lösen Sie explizit (*ohne* den Erhaltungssatz Proposition 1.13) das Variationsproblem der hängenden Kette (vgl. Beispiel $\boxed{11}$ der Vorlesung)

$$\mathscr{F}(v) := \int_a^b v(x)\sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx \longrightarrow \quad \text{min!}$$

in $C_{c_1} := \{v \in C^1([a,b]) : (a, v(a)) = P, (b, v(b)) = Q, \mathscr{L}(v) = c_1\}$, wobei $\mathscr{L}$ das Längenfunktional wie in Übungsaufgabe 11 bezeichnet, $P, Q \in \mathbb{R}^2$ vorgegebene Punkte sind, und $c_1 \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $c_1 > |P-Q|$ erfüllt.

Hinweis: Nutzen Sie nach Anwendung der Lagrange Multiplikatorregel (Prop. 1.19) die DuBois-Reymond-Gleichung (Prop. 1.9).

Zur Erinnerung: Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d), wobei X eine Menge ist und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften für alle $x,y,z \in X$:

(i) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

(X,d) heißt *vollständiger* metrischer Raum, falls jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt. Ein normierter Vektorraum $(Y, \|.\|)$ heißt *Banachraum*, falls Y ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der induzierten Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ ist.

Aufgabe 19

[$(C^1(\bar{I}), \|.\|_{1,2})$ nicht vollständig]

Zeigen Sie, dass $(C^1(\bar{I}), \|.\|_{1,2})$ nicht vollständig ist, wobei $\|u\|_{1,2} := \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}$ ist.

Hinweis: Geben Sie ein Beispiel einer Cauchy-Folge in $C^1(\bar{I})$ an, deren Grenzwert (bezüglich $\|.\|_{1,2}$) nicht überall differenzierbar ist.

Aufgabe 20 **[Beispiele von Sobolevfunktionen]**

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

in $W^{1,\infty}(B_1(0))$ liegt.

(ii) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \log\log\frac{1}{|x|} & \text{für } x \in B_1(0) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $0 < R < 1$ in $W^{1,2}(B_R(0))$ liegt.

(iii) Sei $n = 1$. Ist die *Heavyside-Funktion*

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Sobolevfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.
