Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Michael Dahmen, Tobias Hermes, Matthias Schlottbom

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 6 vom 20.11.2007

Aufgabe 21

[Eigenschaften von Differenzenquotienten]

Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ die folgenden Eigenschaften von Differenzenquotienten $\triangle_h^{e_l} \equiv \triangle_h$, $e_l \in S^{n-1}, l \in \{1, \dots, n\}, h \neq 0$:

(i)

$$\triangle_h(uv)(x) = (\triangle_h u)(x)v(x) + u_h(x)\triangle_h v(x) = (\triangle_h u)(x)v_h(x) + u(x)\triangle_h v(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$, $|h| < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, wobei für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f_h(x) := f(x + he_l)$$

gesetzt wurde.

(ii) Falls u oder v kompakten Träger in Ω haben, dann gilt für $|h| \ll 1$

$$\int_\Omega u(x)\triangle_h v(x)\,dx = -\int_\Omega \triangle_{-h} u(x) v(x)\,dx.$$

Aufgabe 22

[Stetige Fortsetzung]

Seien X ein normierter Vektorraum, Y ein Banachraum und $Z \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(i) Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : Z \to Y$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$ besitzt.

(ii) Beweisen Sie, dass es zu $T \in L(Z,Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X,Y)$ gibt.

Hinweis: Das *Prinzip der eindeutigen stetigen Fortsetzung* wird wiederholt in der Vorlesung benutzt, siehe z.B. den Beweis von Lemma 2.7.

Aufgabe 23

[Eine Kettenregel für Sobolevfunktionen]

Beweisen Sie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Dann ist für $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, die Komposition $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$, und es gilt

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Hinweis: Approximieren Sie u zunächst mit glatten Funktionen u_m.

Aufgabe 24

[Fortsetzung von Funktionen]

Für $u : \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei

$$E_0 u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{für } t \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y,-it) & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i (-i)^m = 1 \qquad \text{für alle } m = 0,\dots,k, \tag{1}$$

gelten soll.

(i) Zeigen Sie, dass (1) genau eine Lösung $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_{k+1})$ besitzt.

(ii) Beweisen Sie, dass für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$

$$E_0 u \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

gilt.

Hinweis: Diese Resultate gehen in den Beweis des Fortsetzungssatzes für Sobolevfunktionen, Satz 2.12, ein.
