Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Michael Dahmen, Tobias Hermes, Matthias Schlottbom

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 7 vom 27.11.2007

Aufgabe 25

[Poincaré Ungleichungen]

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Beweisen Sie:

(i) Falls Ω zusammenhängend ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n,p,\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |u - \bar{u}_\Omega|^p \, dx \leq C(n,p,\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \qquad \text{für alle } \ u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei wir

$$\bar{u}_\Omega := \fint_\Omega u(x)\, dx = \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, dx$$

gesetzt haben.

(ii) Sei $\alpha > 0$, Ω zusammenhängend und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n,p,\Omega,\alpha)$, so dass

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq C(n,p,\Omega,\alpha) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \qquad \text{für alle } \ u \in W^{1,p}(\Omega) \ \text{mit} \ \mathscr{L}^n(\{u=0\}) \geq \alpha.$$

(iii) Es gibt eine Konstante $C = C(n,p,\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq C(n,p,\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \qquad \text{für alle } \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Zeigen Sie abschließend, dass man für $\Omega = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ die Konstanten $C = C(n,p)R^p$ in (i) und (iii), bzw. $C = C(n,p,\alpha)R^p$ in (ii) wählen kann.

Aufgabe 26

[Beispiele zu den Einbettungssätzen]

(i) Zeigen Sie, dass keine stetige Einbettung des Raumes $W^{1,n}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ existiert (vgl. mit dem Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.8 (i) der Vorlesung).

Hinweis: Betrachten Sie dazu z.B. die Funktion

$$u(x) := \log(1 + |\log|x||) \qquad \text{für } \ x \in B_1(0).$$

(ii) Diskutieren Sie die Funktion

$$u(x) := \frac{|\log|x||^{1/4}}{1+|x|^2} \qquad \text{für } \ x \in \mathbb{R}^n$$

für unterschiedliche Dimensionen n im Hinblick auf den Morreyschen Einbettungssatz, Satz 2.8 (ii) der Vorlesung.

Aufgabe 27

[Schwache Konvergenz]

Sei X ein Banachraum mit seinem Dualraum X^*, dann heißt eine Folge $(x_k) \subset X$ *schwach konvergent* gegen $x \in X$ ("$x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \to \infty$"), wenn

$$\langle l, x_k \rangle_{X^* \times X} := l(x_k) \to l(x) = \langle l, x \rangle_{X^* \times X} \qquad \text{für alle } \; l \in X^*.$$

Die Konvergenz $x_k \to x$ bezüglich der Norm in X nennen wir im Folgenden auch *starke Konvergenz* – sie wird oft auch als *Normkonvergenz* bezeichnet.

Zeigen Sie:

(i) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(ii) Die Norm in X ist *schwach unterhalbstetig*, d.h. es gilt

$$x_k \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \|x\|_X \leq \liminf_{k \to \infty} \|x_k\|_X .$$

(iii) Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform. Zeigen Sie: Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X, dann gilt

$$B(x,x) \leq \liminf_{k \to \infty} B(x_k, x_k).$$

Aufgabe 28

[Absolutstetige Funktionen]

Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \in W^{1,1}(I)$ gilt

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\, dt \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x, y \in I.$$

(ii)* Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\, dt \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x, y \in I,$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$.

Hinweis: Für Teil (i) können Sie u nach Korollar 2.13 der Vorlesung (global) in $W^{1,1}(I)$ durch glatte Funktionen approximieren, für die der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung gilt. Zum Nachweis der Regel der partiellen Integration für Teil (ii) wählen Sie ein Teilintervall (a_1, b_1), außerhalb dessen eine gegebene Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(I)$ verschwindet, und so dass für a_1, b_1 die vorausgesetzte Identität gilt.
