Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Michael Dahmen, Tobias Hermes, Matthias Schlottbom

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 8 vom 4.12.2007

Aufgabe 29

[Unterhalbstetigkeit im $\mathbb{R}^n$]

Zeigen Sie: Eine auf dem $\mathbb{R}^n$ unterhalbstetige Funktion f nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ihr Infimum an, d.h. es gibt ein $x \in K$, so dass

$$f(x) = \inf_K f(.).$$

Aufgabe 30

[Charakterisierung der Unterhalbstetigkeit]

Sei X ein topologischer Raum, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann gilt: $f : X \to \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig (bzw. oberhalbstetig) genau dann, wenn $f^{-1}[(a,\infty)]$ (bzw. $f^{-1}[(-\infty,a)]$) offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 31

[Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals]

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $\mathscr{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(I)$, $p \in (1,\infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Hinweis: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.

Aufgabe 32

[Klassische Nullrandwerte]

Sei $1 \leq p < \infty$ und $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$.

Zeigen Sie: Für $u \in W^{1,p}(I)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ gilt $u \in W_0^{1,p}(I)$.
