Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 9 vom 11.12.2007

Aufgabe 33

[Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit]

Tonelli's Unterhalbstetigkeitssatz (Satz 3.5) wird für $N > 1$ falsch, wenn man die schwache Konvergenz in $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$, durch die Bedingungen

$$u_k, u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N), \quad u_k \rightarrow u \text{ in } L^1(I, \mathbb{R}^N) \quad (*)$$

ersetzt.

Zeigen Sie für $N = 2$, $I = (0, 1)$, dass die Funktion

$$F(x, z, p) := (z_1 \cdot p_2)^2 \text{ für } z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ein Gegenbeispiel liefert, d.h., dass zwar F die Voraussetzungen (i)–(iii) aus Satz 3.5 erfüllt, dass aber das Funktional $\mathcal{F}(u) := \int_0^1 F(x, u(x), u'(x)) dx$ nicht unterhalbstetig ist bezüglich der Konvergenz in (*).

Hinweis: Konstruieren Sie eine Funktionenfolge

$$\{u_k\}_k = \{(u_{1k}, u_{2k})\}_k \subset C^{0,1}([0, 1], \mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}((0, 1), \mathbb{R}^2),$$

so dass $u_{1k} \rightarrow u_1(x) \equiv 1$ und $u_{2k} \rightarrow u_2(x) = x$ in $L^1((0, 1))$ konvergieren, und so dass $u'_{2k}(x) \cdot u_{1k}(x) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$.

Aufgabe 34

[Superlinearer Integrand]

Sei $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $F \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x)) dx$, und es gebe eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$F(x, z, p) \geq \theta(p) \geq 0 \text{ für alle } (x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$
$$\frac{\theta(p)}{|p|} \rightarrow \infty \text{ für } |p| \rightarrow \infty.$$

Zeigen Sie: Falls für die Folge $\{u_k\}_k \subset \{v \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$ die Zahlenfolge $\{\mathcal{F}(u_k)\}_k$ beschränkt ist, dann ist auch die Zahlenfolge $\{\|u_k\|_{W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)}\}_k$ beschränkt.

Aufgabe 35

Sei $I = (0, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(v) := \int_I [\phi(v'(x)) + v(x)] dx$, wobei

$$\phi(p) := \begin{cases} (1-p^2)^2 & \text{für } |p| > 1, \\ 0 & \text{für } |p| \leq 1, \end{cases}$$

und es gelte $\mathcal{G}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha, \beta)} \mathcal{G}(\cdot)$ für

$$u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta) := \{v \in W^{1,4}(I) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

Zeigen Sie:

$$0 = \int_I [\phi'(u'(x)) - x] \eta'(x) dx \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(I).$$

Hinweis: Berechnen Sie $\delta \mathcal{G}(u, \eta)$.

Aufgabe 36

[Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]

VOR.: Seien $F, G_1, G_2, \dots, G_m \in C^1(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, mit

$$|F| + |F_z| + |F_p| + \sum_{i=1}^m [|G_i| + |(G_i)_z| + |(G_i)_p|] \leq C(1 + |p|^2) \text{ auf } \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

und $u \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(\cdot),$$

wobei

$$\mathcal{C} := \{v \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N) : \mathcal{G}_i(v) = c_i, i = 1, \dots, m\},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_i(v) := \int_I G_i(x, v(x), v'(x)) dx$, $i = 1, \dots, m$. Weiterhin gebe es $\psi_1, \dots, \psi_m \in C^\infty(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, so dass die $(m \times m)$ -Matrix $(\delta \mathcal{G}_i(u, \psi_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta \mathcal{F}(u, \phi) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta \mathcal{G}_i(u, \phi) = 0 \text{ für alle } \phi \in C^\infty(\bar{I}, \mathbb{R}^N).$$