Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 1 vom 19.10.2009

Aufgabe 1 **[Beispiel eines Minimierers in $C^1 \setminus C^2$]**

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$u_*(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,0], \\ x^2 & \text{für } x \in (0,1] \end{cases}$$

der *eindeutige* Minimierer von

$$\mathscr{F}(u) := \int_{-1}^{1} u^2(x)[2x - u'(x)]^2 \, dx$$

in der Klasse

$$\mathscr{C} := \{u \in C^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$$

ist (vgl. Beispiel $\boxed{4}$ aus Abschnitt 1.1).

Aufgabe 2 **[1. Variation & Euler-Lagrange-Gl. in mehreren Dimensionen]**

Betrachte Variationsintegrale der Form

$$\mathscr{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) \, dx, \tag{1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, offen und beschränkt ist, $F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$, $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, und wobei $Du(x)$ die Jakobische von u bezeichnet.

(a) Leiten Sie analog zur Vorlesung eine Formel für die erste Variation $\delta\mathscr{F}(u, \phi)$ her (vgl. Def. 1.1), wobei $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

(b) Wie lauten die zugehörigen Euler-Lagrangeschen Gleichungen für eine schwache $\mathscr{F}$-Extremale $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$? (vgl. Prop. 1.6)

(c) Geben Sie für $N = 1$, $n \geq 1$ die Euler-Lagrangeschen Gleichungen für die Funktionale

$$\mathscr{D}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du(x)|^2 \, dx, \quad \textit{(Dirichlet Integral)} \tag{2}$$

$$\mathscr{F}(u) := \mathscr{D}(u) + \int_{\Omega} f(x) u(x) \, dx, \tag{3}$$

$$\mathscr{G}(u) := \mathscr{D}(u) + \int_{\Omega} g(u(x)) \, dx, \tag{4}$$

an, wobei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

Aufgabe 3 **[Mittelwertkonvergenz]**

Sei $x \in I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $I_i \subset I$ eine Folge von Intervallen, so dass folgendes gilt: Es gibt Zahlen $\sigma, r_i > 0$ mit $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$, so dass

$$I_i \subset (x - r_i, x + r_i) \quad \text{und} \quad |I_i| \geq \sigma|(x - r_i, x + r_i)| = 2\sigma r_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie: Ist x ein Lebesgue Punkt von $f \in L^1(I)$, dann gilt

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} f(y)\, dy.$$

Bemerkung. Der Punkt x muss nicht in I_i liegen, nicht einmal in $\overline{I}_i$.

Zusatz*: Versuchen Sie, die Aussage auch im $\mathbb{R}^n$ zu formulieren und zu beweisen, indem Sie die Intervalle I_i durch Borelmengen $E_i \subset \mathbb{R}^n$ und die Intervalle $(x - r_i, x + r_i)$ durch offene Bälle

$$B_{r_i}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r_i\}$$

ersetzen.

Aufgabe 4 **[Kreisbögen als Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen]**

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional

$$\mathscr{F}(u) := \int_0^1 \{\sqrt{1 + (u'(x))^2} + Hu(x)\}\, dx, \quad H = const \in (-1,1) \setminus \{0\},$$

her, und beweisen Sie unter geeigneten Annahmen an Integrationskonstanten, dass für jede Lösung $u \in C^2((0,1))$ der Euler-Lagrange-Gleichung der Graph von u

$$\operatorname{graph} u := \{(x, u(x)) : x \in (0,1)\}$$

ein Kreisbogen mit Radius $R := 1/|H|$ darstellt.
