Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

# Übungen zur Vorlesung
# Variationsrechnung I
# Serie 10 vom 21.12.2009

---

## Aufgabe 37*

**[Clarkson für $q \in (1,2)$]**

Beweisen Sie die Aussage aus Aufgabe 36 für $q \in (1,2)$.

*Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es in einem normierten, uniform konvexen Raum $X$ mit $p \in (1,\infty)$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_p(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft*

$$|\|x\|, \|y\| \leq 1, \|x-y\|| \geq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \|\frac{1}{2}(x+y)\|^p \leq (1-\delta_p)\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$$

*gibt. (Beweis?) Obige Gleichung gilt dann auch für beliebige $x,y \in X$, wobei $\delta_p = \delta_p(\frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|,\|y\|)})$. Betrachten Sie nun für $f,g \in L^p(I)$ die Mengen*

$$M = \left\{ t \in I \middle| |f(t)-g(t)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4}(|f(t)|^p + |g(t)|^p) \left( \geq \frac{\varepsilon^p}{4}\max(|f(t)|^p, |g(t)|^p) \right) | \right\}$$

*und $N := I \setminus M$.*

---

## Aufgabe 38

Sei $G \in C^1(\mathbb{R})$, und es gebe eine Konstante $C \geq 0$, so dass $|G'(z)| \leq C(1+|z|)$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Existenz einer Funktion

$$u \in \mathscr{C}_0 := \{w \in W_0^{1,2}((0,1)) : \int_0^1 G(w(x))\,dx = 0\},$$

so dass $\mathscr{D}(u) = \inf_{\mathscr{C}_0} \mathscr{D}$, wobei

$$\mathscr{D}(w) := \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx$$

das Dirichlet-Integral bezeichnet. Hierbei nehmen wir an, dass die Klasse $\mathscr{C}_0$ zulässiger Funktionen nichtleer ist.

---

## Aufgabe 39

Beweisen Sie die folgende (für den Beweis des Satzes von Reshetnyak benutzte) elementare Aussage: Für zwei reelle Zahlenfolgen $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ mit $a_k \to a$ für $k \to \infty$ gilt

$$\liminf_{k\to\infty}(a_k - b_k) = a - \limsup_{k\to\infty} b_k.$$

---

Aufgabe 40 Sei $f \in L^2((0,1))$. Zeigen Sie, dass das Variationsintegral

$$\mathscr{F}(w) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}|w'(x)|^2 - f(x)w(x)\right] dx$$

einen *eindeutigen* Minimierer in der Klasse

$$\mathscr{C} := \{w \in W_0^{1,2}((0,1)) : |w'(x)| \leq 1 \text{ für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in (0,1)\}$$

besitzt.

---

Aufgabe 41 Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $q > 1$, und es gebe $c_0 > 0$, so dass

$$c_0|p|^q \leq f(p) \text{ für alle } \ p \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie:

(i) $\nabla f(.) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ surjektiv.

(ii) Falls $f$ zusätzlich konvex ist, dann gilt $|\nabla f(p)| \to \infty$ für $|p| \to \infty$.

*Hinweis: Betrachten Sie für Teil (i) zu beliebig vorgegebenem $v \in \mathbb{R}^N$ die Funktion $g_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit $g_v(x) := f(x) - x \cdot v$. Nutzen Sie für Teil (ii) die wegen der Konvexität gültige Beziehung*

$$f(0) \geq f(p) + (0-p)\nabla f(p) \quad \textit{für alle} \ \ p \in \mathbb{R}^N.$$

---