Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 3 vom 2.11.2009

Aufgabe 9 **[Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]**

Beweisen Sie (in Verallgemeinerung von Prop. 1.19) die *Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen:*

VOR.: Seien $F, G_1, G_2, \dots, G_m \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, und $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\mathscr{F}(u) = \min_{C_\delta} \mathscr{F}(.),$$

wobei

$$\begin{aligned} C_\delta \quad := \quad & \{v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta, \\ & \qquad \|v-u\|_{C^1(\bar{I},\mathbb{R}^N)} < \delta,\, \mathscr{G}_i(v) = c_i, i = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

mit gegebenen Konstanten $\delta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^N, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, und wobei

$$\mathscr{G}_i(v) := \int_I G_i(x, v(x), v'(x))\, dx, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weiterhin gebe es $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_m \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, so dass die $(m \times m)$-Matrix $(\delta\mathscr{G}_i(u, \bar{\psi}_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta\mathscr{F}(u,\phi) + \lambda_1 \delta\mathscr{G}_1(u,\phi) + \cdots + \lambda_m \delta\mathscr{G}_m(u,\phi) = 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Aufgabe 10 **[Euler-Lagrange-Gleichung höherer Ordnung]**

Sei $u \in C^{2m}(I, \mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$ eine schwache Extremale von

$$\mathscr{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(m)}(x))\, dx,$$

wobei $F = F(x, z, p_1, \dots, p_m) \in C^{m+1}(I \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N)$.
Beweisen Sie: Für alle $x \in I$ gilt

$$F_z(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \left[F_{p_i}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) \right] = 0.$$

Aufgabe 11 **[Natürliche Randbedingungen in zwei Dimensionen]**

Betrachte Variationsintegrale der Form

$$\mathscr{F}(u) := \int_{B^+} F(x, u(x), Du(x))\, dx, \tag{1}$$

wobei $B^+ := \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x^2 > 0\}$. Sei $u \in C^2(\overline{B^+}, \mathbb{R}^N)$, $F \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N})$, $I = (-1,1) \times \{0\}$, und $Du(x)$ bezeichne die Jakobische von u.

(a) Beweisen Sie: Falls $\delta\mathscr{F}(u,\phi) = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(B^+ \cup I, \mathbb{R}^N)$, dann gelten die *natürlichen Randbedingungen*

$$F_{p_2^i}(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ für alle } x \in I,\, i = 1, \ldots, N.$$

Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Proposition 1.12 vor und nutzen Sie Aufgabe 2 von Serie 1.

(b) Geben Sie für die Funktionale

$$\mathscr{D}(u) := \frac{1}{2}\int_{B^+} |Du(x)|^2\, dx \quad \textit{(Dirichlet Integral),} \tag{2}$$

$$\mathscr{A}(u) := \int_{B^+} \{\sqrt{1 + |Du(x)|^2} + g(x,u)\}\, dx \tag{3}$$

(Flächenfunktional mit äußerem Potential)

die natürlichen Randbedingungen konkret an, wobei $g \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N)$ ist.

Aufgabe 12

Beweisen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}(v) := \int_I v(x)\sqrt{1 + (v'(x))^2}\, dx, \quad \mathscr{L}(v) := \int_I \sqrt{1 + (v'(x))^2}\, dx$$

gilt die Aussage:

u ist schwache Extremale von $\mathscr{F} + \lambda\mathscr{L}$ genau dann, wenn $u + \lambda$ eine schwache Extremale von $\mathscr{F}$ ist.
