Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 4 vom 9.11.2009

Aufgabe 13 **[Flächenfunktional für zweidimensionale Graphen]**

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$ sei schwache $\mathscr{F}$-Extremale für das Flächenfunktional

$$\mathscr{F}(v) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v(x)|^2}\, dx.$$

Zeigen Sie:

$$\mathscr{F}(u) \leq \mathscr{F}(v) \quad \text{für alle } v \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ mit } v = u \text{ in einer Umgebung von } \partial\Omega.$$

Hinweis: Machen Sie sich zunächst mit Hilfe von Faltungen (z.B. mit dem zugehörigen Satz aus der Übung) klar, dass $\delta\mathscr{F}(u, u - v) = 0$. (Das kann man übrigens auch zeigen, wenn nur $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ und $u = v$ auf $\partial\Omega$, was wir im dritten Kapitel der Vorlesung sehen werden.)

Detail:

Aufzeichnung aus Steffens Habil, p. 83

Aufgabe 14 **[Nichtlösbares Variationsproblem I]**

(i) Zeigen Sie, dass das Variationsintegral

$$\mathscr{F}(v) := \int_0^1 (v'^2(x) - 1)^2\, dx$$

in der Klasse

$$C := \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$

keinen Minimierer besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ in

$$D := \{v \in C^{0,1}([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$

unendlich viele Minimierer besitzt.

(iii)* Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathscr{G}(v) := \int_0^1 (1 + v^2(x))[1 + (v'^2(x) - 1)^2]\, dx$$

in der Klasse D keine Lösung besitzt.

Detail:

Gia-Hil p39,40

Aufgabe 15 **[Nichtlösbares Variationsproblem II]**

Sei $h(x) := 1 - |x|$ für $x \in [-2,2]$ eine Funktion, die das folgende Hindernisproblem determiniert: Gesucht ist ein Minimierer des Längenfunktionals

$$\mathscr{L}(v) := \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + v'^2(x)}\, dx$$

in der Klasse

$$C_h := \{v \in C^1([-2,2]) : v(-2) = 0 = v(2),\, v(x) \geq h(x)\ \forall x \in [-2,2]\}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Problem keine Lösung besitzt.

Hinweis: Der Polygonzug, der die vorgegebenen Randpunkte über die Spitze des Hindernisses verbindet, liefert offensichtlich die kürzeste Verbindung der Randpunkte unter Berücksichtigung der Hindernisbedingung. Vergleichen Sie dessen Länge mit der eines beliebigen Minimierers $u \in C_h$; setzen Sie dazu an einer Maximalstelle von u an.

Detail:

Die erwartete nichtdifferenzierbare Loesung ist der Polygonzog aus den Strecken $\overline{(-2,0)(0,1)}$ und $\overline{(0,1)(2,0)}$. Zunaechst muss man sich durch eine geeignete approximierende Folge in C_h klarmachen, dass $\inf_{C_h} \mathscr{F} =$ Laenge dieses Polygonzugs. (Dazu koennte man z.B. geeignet kleine Kreisboegen, die von dem Punkt $(0, 1+\varepsilon)$ halbiert werden, in C^1-Weise geradlinig mit den vorgeschriebenen Randpunkten verbinden. Wenn $\varepsilon \to 0$ sollte die Bogenlaenge der Kreisboegen entsprechend kleiner werden. Dann betrachte man den Punkt $(0, u(0)$. In C_h sollte $u(0) \geq 1$ sein. Wenn $u(0) > 1$, dann ist jede Kurve, die die Randdaten mit dem Punkt $(0, u(0)$ verbindet, echt länger als die oben angegebene nichtglatte Loesung. Wenn $u(0) = 1$ nicht das Maximum von u ist, dann erhaelt man wieder eine zu grosse Laenge. Wenn $u(0) = 1$ das Maximum ist, dann gilt wegen $u \in C^1$, dass $u'(0) = 0$. Dann muss man sich klarmachen, dass dieses horizontale Abheben vom Hindernis Graph h auch zu laengeren Kurven fuehrt. Moeglicherweise muss man Hinweise an die Hörer geben.

Aufgabe 16 **[Schwingende Saite]**

Leiten Sie für die Lösung $u \in C^2([a,b])$ des Variationsproblems der schwingenden Saite

$$\mathscr{F}(v) := \int_a^b |v'^2(x)|\, dx \quad \to \min!$$

in der Klasse

$$C := \{v \in C^1([a,b]) : v(a) = 0 = v(b),\, \int_a^b v^2(x)\, dx = 1\}$$

die EULER-LAGRANGE-Gleichungen her und bestimmten Sie den als Eigenwert auftretenden Lagrange-Parameter explizit in Abhängigkeit von der Lösung u.

Detail:

Gia-Hil, p.95, Beispiel $\boxed{2}$.
