Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 5 vom 16.11.2009

Aufgabe 17 **[Die hängende Kette]**

Lösen Sie explizit (*ohne* den Erhaltungssatz Proposition 1.13) das Variationsproblem der hängenden Kette (vgl. Beispiel $\boxed{11}$ der Vorlesung)

$$\mathscr{F}(v) := \int_a^b v(x)\sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx \longrightarrow \quad \text{min!}$$

in $C_{c_1} := \{v \in C^1([a,b]) : (a,v(a)) = P,\, (b,v(b)) = Q,\, \mathscr{L}(v) = c_1\}$, wobei $\mathscr{L}$ das Längenfunktional wie in Übungsaufgabe 11 bezeichnet, $P,Q \in \mathbb{R}^2$ vorgegebene Punkte sind, und $c_1 \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $c_1 > |P-Q|$ erfüllt.

Hinweis: Nutzen Sie nach Anwendung der Lagrange Multiplikatorregel (Prop. 1.19) die DuBois-Reymond-Gleichung (Prop. 1.9).

Aufgabe 18 **[Beispiele von Sobolevfunktionen]**

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

in $W^{1,\infty}(B_1(0))$ liegt.

(ii) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \log\log\frac{1}{|x|} & \text{für } x \in B_1(0)\setminus\{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $0 < R < 1$ in $W^{1,2}(B_R(0))$ liegt.

(iii) Sei $n = 1$. Ist die *Heavyside-Funktion*

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Sobolevfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zur Erinnerung: Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d), wobei X eine Menge ist und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften für alle $x,y,z \in X$:

(i) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

(X,d) heißt *vollständiger* metrischer Raum, falls jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt. Ein normierter Vektorraum $(Y, \|.\|)$ heißt *Banachraum*, falls Y ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der induzierten Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ ist.

Aufgabe 19

[$(C^1(\bar{I}), \|.\|_{1,2})$ nicht vollständig]

Zeigen Sie, dass $(C^1(\bar{I}), \|.\|_{1,2})$ nicht vollständig ist, wobei $\|u\|_{1,2} := \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}$ ist.

Hinweis: Geben Sie ein Beispiel einer Cauchy-Folge in $C^1(\bar{I})$ an, deren Grenzwert (bezüglich $\|.\|_{1,2}$) nicht überall differenzierbar ist.

Aufgabe 20

[Eigenschaften von Differenzenquotienten]

Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ die folgenden Eigenschaften von Differenzenquotienten $\triangle_h^{e_l} \equiv \triangle_h$, $e_l \in S^{n-1}, l \in \{1, \ldots, n\}, h \neq 0$:

(i)

$$\triangle_h(uv)(x) = (\triangle_h u)(x)v(x) + u_h(x)\triangle_h v(x) = (\triangle_h u)(x)v_h(x) + u(x)\triangle_h v(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$, $|h| < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, wobei für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f_h(x) := f(x + he_l)$$

gesetzt wurde.

(ii) Falls u oder v kompakten Träger in Ω haben, dann gilt für $|h| \ll 1$

$$\int_\Omega u(x)\triangle_h v(x)\,dx = -\int_\Omega \triangle_{-h} u(x)v(x)\,dx.$$
