Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 7 vom 30.11.2009

Aufgabe 25

[Schwache Konvergenz]

Sei X ein Banachraum mit seinem Dualraum X^*, dann heißt eine Folge $(x_k) \subset X$ *schwach konvergent* gegen $x \in X$ ("$x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \to \infty$"), wenn

$$\langle l, x_k \rangle_{X^* \times X} := l(x_k) \to l(x) = \langle l, x \rangle_{X^* \times X} \quad \text{für alle } \ l \in X^*.$$

Die Konvergenz $x_k \to x$ bezüglich der Norm in X nennen wir im Folgenden auch *starke Konvergenz* – sie wird oft auch als *Normkonvergenz* bezeichnet.

Zeigen Sie:

(i) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(ii) Die Norm in X ist *schwach unterhalbstetig*, d.h. es gilt

$$x_k \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \|x\|_X \le \liminf_{k \to \infty} \|x_k\|_X.$$

(iii) Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform. Zeigen Sie: Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X, dann gilt

$$B(x,x) \le \liminf_{k \to \infty} B(x_k, x_k).$$

Hinweis: Für den Beweis der Aussage (ii) *kann man eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach benutzen: Zu jedem Element x in einem normierten linearen Raum X gibt es ein lineares stetiges Funktional l aus dem Dualraum X^* von X, so dass $\|l\|_{X^*} = 1$ und $l(x) = \|x\|_X$.*

Aufgabe 26

[Absolutstetige Funktionen]

Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie: Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\, dt \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x, y \in \bar{I},$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$. *Hinweis: Wählen Sie ein Teilintervall (a_1, b_1), außerhalb dessen eine gegebene Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(I)$ verschwindet, und so dass für a_1, b_1 die vorausgesetzte Identität gilt.*

Aufgabe 27

[Klassische Nullrandwerte]

Sei $1 \leq p < \infty$ und $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$.

Zeigen Sie: Für $u \in W^{1,p}(I)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ gilt $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Aufgabe 28

[Unterhalbstetigkeit im $\mathbb{R}^n$]

Zeigen Sie: Eine auf dem $\mathbb{R}^n$ unterhalbstetige Funktion f nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ihr Infimum an, d.h. es gibt ein $x \in K$, so dass

$$f(x) = \inf_K f(.).$$
