Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

# Übungen zur Vorlesung
# Variationsrechnung I
# Serie 8 vom 7.12.2009

---

## Aufgabe 29

**[Charakterisierung der Unterhalbstetigkeit]**

Sei $X$ ein topologischer Raum, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann gilt: $f : X \to \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig (bzw. oberhalbstetig) genau dann, wenn $f^{-1}[(a,\infty)]$ (bzw. $f^{-1}[(-\infty,a)]$) offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.

---

## Aufgabe 30

**[Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals]**

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $\mathscr{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(I)$, $p \in (1,\infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.

*Hinweis: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.*

---

## Aufgabe 31

**[Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit]**

Tonelli's Unterhalbstetigkeitssatz (Satz 3.5) wird für $N > 1$ falsch, wenn man die schwache Konvergenz in $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty)$, durch die Bedingungen

$$u_k, u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N), \quad u_k \to u \text{ in } L^1(I,\mathbb{R}^N) \tag{*}$$

ersetzt.

Zeigen Sie für $N = 2$, $I = (0,1)$, dass die Funktion

$$F(x,z,p) := (z_1 \cdot p_2)^2 \text{ für } z = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2, p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ein Gegenbeispiel liefert, d.h., dass zwar $F$ die Voraussetzungen (i)–(iii) aus Satz 3.5 erfüllt, dass aber das Funktional $\mathscr{F}(u) := \int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx$ nicht unterhalbstetig ist bezüglich der Konvergenz in (*).

*Hinweis: Konstruieren Sie eine Funktionenfolge*

$$\{u_k\}_k = \{(u_{1k},u_{2k})\}_k \subset C^{0,1}([0,1],\mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}^2),$$

*so dass $u_{1k} \to u_1(x) \equiv 1$ und $u_{2k} \to u_2(x) = x$ in $L^1((0,1))$ konvergieren, und so dass $u'_{2k}(x) \cdot u_{1k}(x) = 0$ für alle $x \in (0,1)$.*

---

## Aufgabe 32

**[Superlinearer Integrand]**

Sei $I = (a,b), -\infty < a < b < +\infty$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^N$, $F \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathscr{F}(u) := \int_I F(x,u(x),u'(x))\,dx$, und es gebe eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} F(x,z,p) &\geq \theta(p) \geq 0 \text{ für alle } (x,z,p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \frac{\theta(p)}{|p|} &\to \infty \text{ für } |p| \to \infty. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls für die Folge $\{u_k\}_k \subset \{v \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$ die Zahlenfolge $\{\mathscr{F}(u_k)\}_k$ beschränkt ist, dann ist auch die Zahlenfolge $\{\|u_k\|_{W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)}\}_k$ beschränkt.

---